

Zum relativistischen Zweikörperproblem der Quantenmechanik I

Von WILHELM MACKE

Aus dem Instituto de Fisica Téorica, Rua Pamplona 145, São Paulo, Brasil

(Z. Naturforschg. 8a, 599—615 [1953]; eingegangen am 3. Juni 1953)

Die allgemeinste Bethe-Salpeter-Gleichung zur Beschreibung gebundener Zustände zwischen zwei Teilchen wird in eine vierkomponentige, nicht kovariante Gleichung überführt durch Übergang zu einer einzeitigen Beschreibung und Auswertung aller zeitartigen Variablen. Diese Gl. (25) stimmt mit der von Tamm-Dancoff-Lévy auf anderem Wege gefundenen überein bis auf einige charakteristische Unterschiede im Wechselwirkungsoperator V der Gleichung, welcher gemäß (71) durch eine Gesamtheit von Graphen V_{mnrs} repräsentiert wird: 1. Alle (divergierenden!) Vakuumgraphen sind nicht in dieser Gesamtheit enthalten. 2. Die Gesamtheit der Graphen wird weiter verringert um alle Graphen vom Typ der Abb. 7 und 8. 3. In den Energienennern der Zwischenzustände treten gemäß (69) gelegentlich Abweichungen auf. 4. Dieses Verfahren ermöglicht entsprechend seiner Ableitung die Durchführung der Renormalisierung, und damit eine Darstellung von V , die dann eindeutig und frei von divergierenden Bestandteilen ist. Die Renormalisierung von Masse und Ladung wird in einer späteren Arbeit (II) durchgeführt.

Für eine gegebene Mesonentheorie folgt das Zweiteilchenpotential bis zu beliebiger Ordnung der Kopplungskonstanten aus einem System von Graphen.

Von Tamm¹ und Dancoff² ist vor einiger Zeit eine „nichtadiabatische“ Beschreibung der Wechselwirkung zweier Fermionen über ein Mesonenfeld gegeben worden, die über die Beschreibung eines rein statischen Wechselwirkungspotentials hinaus die geschwindigkeitsabhängigen Terme der Wechselwirkung in erster Näherung der Kopplungskonstanten berücksichtigt. Dieses Verfahren wurde von Lévy³ in einer Weise erweitert, die die Behandlung der höheren Potenzen in der Kopplungskonstanten einschließt und auf den Fall skalarer Mesonen mit skalarer⁴ und mit pseudoskalarer Koppelung⁵ angewandt. Die einzelnen Terme der Wechselwirkung lassen sich dabei durch ein System von Graphen beschreiben, welche topologisch die Form der Feynmanschen Graphen aufweisen, aber außerdem noch die Reihenfolge der Punkte unterscheiden, an denen Mesonenlinien ein- und auslaufen. Diese Beschreibung sollte in gleicher Weise exakte Gültigkeit beanspruchen wie die von Bethe-Salpeter⁶ gegebene relativistische Beschreibung zweier Teilchen mit Wechselwirkung, wenn nicht die Divergenzschwierigkeiten der Feldtheorie die praktische Verwertbarkeit der Tamm-Dancoffschen Methode in Frage stellen würden.

Durch die Ableitung aus einem einzeitigen Formalismus wird von vornherein die Kovarianz auf-

gegeben, so daß es nachher nicht mehr möglich ist, die Vakuumeffekte wie auch die Beiträge zur Massen- und Ladungsrenormalisierung eindeutig auszuschalten. Aus diesem Grunde benutzt auch Lévy für alle praktischen Rechnungen eine Mischung beider Methoden, deren genäherte Gleichwertigkeit an Beispielen erläutert und im übrigen vorausgesetzt wird. Alle Glieder, die eine Renormalisierung notwendig machen, werden dementsprechend dem Bethe-Salpeter-Formalismus entnommen. Unter anderem werden die (stark divergierenden) Vakuumeffekte fortgelassen, obwohl die Ableitung aus der einzeitigen Theorie keinerlei Rechtfertigung hierzu gibt und obwohl die Vakuumeffekte in dieser Darstellung die auftretenden Energienenner wirklich wesentlich beeinflussen. Ein solches Fortlassen der Vakuumeffekte kann aber nur dann seine Rechtfertigung finden, wenn es tatsächlich gelingt, die Tamm-Dancoffsche Methode exakt, d. h. für die Gesamtheit aller Graphen, aus der Bethe-Salpeter-Gleichung herzuleiten, in der die Vakuumgraphen nicht enthalten sind. Außerdem lassen sich dabei Unsicherheiten vermeiden, welche durch die nur näherungsweise Übereinstimmung der Ergebnisse beider Methoden dann in die Rechnung gelangen, wenn diese beiden Methoden gemischt angewandt werden.

¹ I. Tamm, J. Physic. USSR 9, 449 [1945].

² S. M. Dancoff, Physic. Rev. 78, 382 [1950].

³ M. Lévy, Physic. Rev. 88, 72 [1952].

⁴ M. Lévy, C. R. hebdo. Séances Acad. Sci. 234, 815, 922, 1225 [1952].

⁵ M. Lévy, Physic. Rev. 88, 725 [1952].

⁶ E. E. Salpeter u. H. A. Bethe, Physic. Rev. 84, 1232 [1951].



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

Aus den dargelegten Gründen wurde vom Verfasser die Bethe-Salpeter-Gleichung als Ausgangspunkt auch der einzeitigen Beschreibung des Zweiteilchenproblems gewählt und der Übergang zur einzeitigen Theorie exakt vollzogen. Die Bethe-Salpeter-Gleichung wird im 1. Abschnitt noch einmal kurz abgeleitet in einer Form, die der weiteren Rechnung angepaßt ist, und wird im 2. Abschnitt in die gesuchte einzeitige Gleichung überführt. Während diese ersten Abschnitte das Problem in allgemein symbolischer Darstellung behandeln, wird die Symbolik in Abschnitt 3 und 4 analytisch dargestellt und in Abschnitt 5 ausgewertet. Ausführlichere Rechnungen sind im mathematischen Anhang, Abschnitt 6, konzentriert.

1. Die Bethe-Salpeter-Gleichung

In der kovarianten Darstellung der Quantenmechanik, die in den letzten Jahren von Tomonaga, Schwinger, Feynman, Dyson u. a. entwickelt wurde, berechnet sich die Wellenfunktion Ψ , welche die Bewegung zweier Teilchen mit Wechselwirkung beschreibt, aus der ungestörten Wellenfunktion Φ durch eine Gleichung von der symbolischen Form

$$\Psi = S\Phi. \quad (1)$$

Dabei beschreibt Φ den Zustand zweier freier Teilchen ohne Wechselwirkung, Ψ den entsprechenden Zustand der beiden Teilchen mit Wechselwirkung, wenn diese vor langer Zeit adiabatisch eingeschaltet wurde, und S ist die Dysonsche S -Matrix, welche die Wechselwirkung der Teilchen enthält. Diese Gleichung ist im allgemeinen nicht sinnvoll zur Beschreibung gebundener Zustände der beiden Teilchen, da freie Teilchen, also ebene Wellen, keinen geeigneten Ausgangspunkt zur Beschreibung gebundener Zustände der beiden Teilchen darstellen, und die Entwicklung von S nach Potenzen der Wechselwirkung dann nicht hinreichend konvergiert.

Wir beschränken uns auf die Betrachtung zweier Fermionen (Dirac-Teilchen vom Spin 1/2), die über ein Boson-Feld (Mesonen) miteinander in Wechselwirkung stehen. Die Wechselwirkungsenergie soll linear bezüglich des Mesonenfeldes und bilinear bezüglich des Fermionenfeldes sein. Dann erhalten wir mit Feynman⁷ eine Darstellung für S in (1) durch die Summe aller nur möglichen topologischen Gebilde aus glatten, gerichteten (Fermionen-) und ge-

schlängelten (Mesonen-) Linien, die sich unter der Bedingung bilden lassen, daß nur zwei Fermionenlinien nach rechts und nach links auslaufen dürfen, daß diese Gebilde innen keine freien Linienenden enthalten dürfen, und daß die Linien miteinander verknüpft sind durch Punkte mit einem Mesonenende, aber zwei Fermionenenden. Die Linien und Punkte jedes solchen Graphen symbolisieren dabei eine bestimmte Anordnung von Funktionen, Variablen und Integrationen, die uns erst im Abschnitt 3 näher beschäftigen wird. Gl. (1) läßt sich dann analytisch interpretieren in der Weise, daß an den beiden rechten freien Fermionenenden die beiden Variablen der ungestörten Wellenfunktion Φ geschlossen werden und an den beiden linken freien Enden die gesuchte Wellenfunktion Ψ abgelesen wird. Bezuglich ausführlicherer Darstellungen sei auf die Arbeiten von Feynman⁷ und Dyson⁸, verwiesen.

Die so definierte Gesamtheit S aller Graphen läßt sich aus anderen Gesamtheiten V , D und C zusammensetzen in der Form:

$$S = V(D + DCD + DCDCD + \dots). \quad (2)$$

Dabei ist V die Gesamtheit aller Vakuumgraphen, bestehend aus allen Graphen (einschließlich Unität), die keine Verbindung mit dem System der Hauptlinien haben, wie das in Abb. 1a wiedergegeben ist.

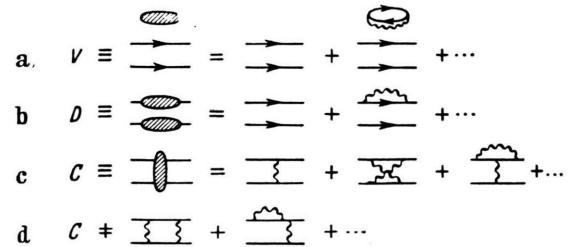


Abb. 1. V = Vakuumgraphen, D = Unverbundene Graphen, C = Verbundene Graphen. In der vierten Zeile (d) sind Beispiele für zerlegbare Graphen angegeben.

D ist die Gesamtheit aller unverbundenen (disconnected) Graphen einschließlich der Unität (Abb. 1b). Unter C verstehen wir die Gesamtheit aller Graphen mit Verbindungen zwischen den beiden Hauptfermionenlinien, die keine Vakuumteile enthalten und sich nicht weiter zerlegen lassen in Graphen vom Typ D und C . Verstehen wir unter der Multiplikation in (2) ein Aneinanderfügen der freien

⁷ R. P. Feynman, Physic. Rev. **76**, 749 [1949].

⁸ F. J. Dyson, Physic. Rev. **75**, 1736 [1949].

Enden der Graphen, so ist leicht ersichtlich, daß die Gesamtheit aller Graphen S gemäß (2) durch die Gesamtheiten V , D und C dargestellt wird. Durch Definition einer anderen Gesamtheit G von Graphen, läßt sich der Inhalt von (2) auch darstellen in der Form:

$$\begin{aligned} S &= V(1+G)D, \\ G &= \sum_{n=1}^{\infty} (DC)^n \equiv (1-DC)^{-1}DC. \end{aligned} \quad (3)$$

G besteht, wie aus (3) ersichtlich, aus der Gesamtheit aller Produktgraphen vom Typ DC . Die Gesamtheit der V ist mit allen übrigen Graphen vertauschbar.

Nun setzen wir (2) in (1) ein und bilden dazu die entsprechende Gleichung für $DC\Psi$ statt Ψ . Als Differenz beider Gleichungen erhalten wir

$$\Psi = DC\Psi + VD\Phi, \quad (4)$$

also eine lineare, inhomogene Gleichung zur Bestimmung von Ψ , deren Lösungen Ψ' sich nicht mehr notwendig auf eine Approximation in ebenen Wellen aufbauen, so daß die anfängliche Beschränkung auf eine bloße Beschreibung von Streuprozessen fortfällt, und diese Gleichung also auch in der Lage ist, stationäre, gebundene Zustände zu beschreiben. Der inhomogene Anteil von (4) hängt mit dem Einschaltvorgang der Störung zusammen, und es wird sich herausstellen, daß er, wenn Ψ' stationäre gebundene Zustände der beiden Teilchen beschreibt, verschwindet. In diesem Falle ist dann (4) eine homogene lineare Gleichung zur Bestimmung der Wellenfunktion Ψ und der Eigenwerte W der Gesamtenergie. Ψ hängt von den 8 Koordinaten x_1'' und x_2'' ab und besteht aus den Spinorkomponenten beider Teilchen, ist also 16-komponentig.

2. Übergang zum einzeitigen Formalismus

Neben der Wellenfunktion $\Psi = \Psi_{\alpha_1 \alpha_2}(x_1 x_2)$ definieren wir die entsprechende Wellenfunktion $\psi = \psi_{\alpha_1 \alpha_2}(\vec{x}_1 \vec{x}_2 t)$ im einzeitigen Formalismus, für die eine entsprechende Gleichung mit dem Operator g anstatt DC gelten soll, und definieren den Übergang von Ψ nach ψ durch einen Operator J :

$$\psi = g\psi, \quad \psi = J\Psi. \quad (5)$$

Dann ist g der zunächst gesuchte Operator der einzeitigen Gleichung. Wir werden anschließend noch zu einer Wellenfunktion a übergehen, die neben den Ortskoordinaten nur noch von den Spins beider

Teilchen abhängt und daher nur vierkomponentig ist. J bedeutet in der bisherigen Definition von Ψ und ψ lediglich die Vorschrift, in Ψ die Zeiten t_1 und t_2 gleichzusetzen.

Der erste Schritt besteht im Übergang zu Schwerpunkts-, und Differenzkoordinaten X und x , die wir definieren durch:

$$\begin{aligned} X &= \zeta_1 x_1 + \zeta_2 x_2, \quad x = x_1 - x_2, \\ \zeta_{1,2} &= \frac{m_{1,2}}{m_1 + m_2}, \quad \zeta_1 + \zeta_2 = 1. \end{aligned} \quad (6)$$

m_1 und m_2 sind die Massen der beiden Teilchen. Formal gelten die Gl. (4) und (5) wie bisher. Der Operator J entspricht der Vorschrift: $x^0 = t_1 - t_2 = 0$.

Weiter transformieren wir diese Gleichungen in den Impulsraum der Koordinaten P_μ und p_μ , die mit den Impulskoordinaten p_μ' und p_μ'' zusammenhängen durch

$$\begin{aligned} P &= p' + p'', & p' &= \zeta_1 P + p, \\ p &= \zeta_2 p' - \zeta_1 p'', & p'' &= \zeta_2 P - p. \end{aligned} \quad (7)$$

Alle Gleichungen bleiben wieder formal ungeändert. Die Graphen sind lediglich später entsprechend ihrer Impulsdarstellung analytisch zu behandeln.

Eine Darstellung für den Operator J erhalten wir einfach, indem wir von Ψ den Zusammenhang zwischen den Darstellungen in Orts- und Impulsvariablen betrachten, wobei wir nur die hier einzige wichtigen Variablen darstellen, nämlich die Zeitkomponenten der Differenzkoordinaten:

$$\Psi(x^0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_0}{2\pi i} e^{-ip_0 x^0} \Psi(p_0). \quad (8)$$

Wenden wir auf diese Gleichung den Operator J an, setzen also $x^0 = 0$, so erhalten wir ψ auf der linken Seite, und auf der rechten Seite verschwindet der Exponentialfaktor. Wir haben damit eine Darstellung für J , wenn die Wellenfunktionen in den Impulskoordinaten P und p dargestellt sind, nämlich

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_0}{2\pi i}. \quad (9)$$

Da die beiden Teilchen ein physikalisch abgeschlossenes System bilden, sind Gesamtenergie P_0 und Gesamtimpuls p_0 Erhaltungsgrößen. Eine stationäre Lösung Ψ von (4), deren Schwerpunkt ruht, deren Gesamtimpuls also verschwindet, muß daher eine δ -Funktion bezüglich P_μ sein:

$$\Psi = \delta(P_0 - W) \delta(\vec{P}) \Psi(W, p_\mu). \quad (10)$$

P_μ als Erhaltungsgröße ist mit der S -Matrix aus (1) und auch mit DC vertauschbar. Daher ist die Wechselwirkung ohne Einfluß auf diese Erhaltungsgröße und es gilt auch für $DC\Psi$ der Ansatz

$$DC\Psi = \delta(P_0 - W) \delta(\vec{P}) DC\Psi(W, p_\mu). \quad (11)$$

Ganz entsprechend schreiben wir für Φ und $VD\Phi$

$$VD\Phi = \delta(P_0 - E) \delta(\vec{P}) VD\Phi(E, p_\mu), \quad (12)$$

nur daß hier E die Energie der freien Teilchen bedeutet. Daher ist $E \geq m_1 + m_2$. Beschreibt nun W einen gebundenen Zustand, so muß $W < m_1 + m_2$ sein, es ist daher $W \neq E$ ⁹. Gl. (4) wird nun mit den Ansätzen (10), (11) und (12) dargestellt und über ein kleines Volumen dP integriert. Die Integration über $d\vec{P}$ erfolgt dabei über einen Bereich, der den Nullpunkt einschließt, und bringt die Funktion $\delta(\vec{P})$ zum Verschwinden. Die Integration über dP_0 erfolgt über einen Bereich von $W - \varepsilon$ bis $W + \varepsilon$, wobei ε so klein ist, daß dieser Bereich die Stelle $P_0 = E$ nicht mit einschließt. Das ist wegen $W \neq E$ immer möglich. Dann verschwindet der inhomogene Anteil von (4) und es bleibt die homogene Gleichung:

$$\Psi(W, p_\mu) = DC\Psi(W, p_\mu). \quad (13)$$

In ganz entsprechender Weise spalten wir in Gl. (5) die Abhängigkeit von den Koordinaten P_μ in der Form $\delta(P_0 - W) \delta(\vec{P}) \psi(W, \vec{p})$ ab und es bleibt formal ungeändert die lineare, homogene Gl. (5) für $\psi(W, \vec{p})$ mit dem Kern g gültig.

Würde zum Operator J der reziproke J^{-1} bekannt sein, so lautete die Lösung für g einfach nach Vergleich von (13) und (5): $g = JDCJ^{-1}$. Dieser Operator ist eine Funktion von p_0 , nämlich $J^{-1} = \Psi(p_0)/\psi$. Seine Angabe erfordert die Kenntnis der Lösung Ψ der Wellengleichung. Gemäß der Darstellung (9) existieren jedoch beliebig viele Rechtsinverse J_0^{-1} von J , die aber nicht gleichzeitig Linksinverses sind, nämlich alle Funktionen $J_0^{-1} = f(p_0)$ mit der Eigenschaft $JJ_0^{-1} = 1$. Für einen solchen Operator gilt dann $JJ_0^{-1}\psi = Jf(p_0)\psi = \psi$. Dagegen ist $J_0^{-1}J\Psi = J_0^{-1}\psi = f(p_0)\psi \neq \Psi$, also $J_0^{-1}J \neq 1$.

Wir werden im folgenden ein solches beliebiges Rechtsinverses $f = J_0^{-1}$ ansetzen und darauf ein Näherungsverfahren aufbauen, welches sich bis zu

⁹ Bei (1) und (4) wurde angenommen, daß die Wechselwirkung zu einer Zeit $-\tau$ adiabatisch eingeschaltet wurde. (10) bis (13) ergeben sich dann im Grenzfall $\tau \rightarrow \infty$.

beliebiger Näherung behandeln läßt. Später in Abschnitt 4 werden wir einen speziellen Ansatz für J_0^{-1} wählen. Vernachlässigt man nämlich die Retardierung in der Wechselwirkung, so verbleiben nur zeitunabhängige, rein statische Wechselwirkungskräfte, unter deren Einfluß sich die Zeitabhängigkeit von Ψ , und damit auch J_0^{-1} sofort angeben läßt. In diesem Sinne entsteht dann also ein Störungsverfahren, dessen Glieder die Retardierung successiv in Potenzen von v/c berücksichtigen mit v als der Differenzgeschwindigkeit.

Mit einem zunächst willkürlichen Ansatz für J_0^{-1} zerlegen wir die Gesamtheit der Graphen DC in

$$DC = DC J_0^{-1} J + \Delta, \text{ wo } JJ_0^{-1} = 1. \quad (14)$$

Da J_0^{-1} kein Linksinverses von J ist, ist $\Delta \neq 0$. Wir gehen mit (14) in Gl. (13) ein und erhalten unter Berücksichtigung von (5)

$$\Psi = DC J_0^{-1} \psi + \Delta \Psi = (1 - \Delta)^{-1} DC J_0^{-1} \psi. \quad (15)$$

Der zweite Ausdruck in (15) folgt durch Auflösung nach Ψ . Reziproke Operatoren sind dabei im Sinne einer Reihenentwicklung zu verstehen. Die Existenz dieser Operatoren hängt mit der Konvergenz der Reihen zusammen und wird im folgenden vorausgesetzt. Die Problematik dieser Frage ist die gleiche wie bei allen Problemen der Feldphysik, in denen nach der Kopplungskonstanten entwickelt wird. Sie soll hier nicht weiter diskutiert werden. Durch Anwendung von J auf (15) und Vergleich mit (5) folgt der Operator g der einzeitigen Gleichung

$$g = J(1 - \Delta)^{-1} DC J_0^{-1}. \quad (16)$$

Wir definieren einen Operator \check{g} durch G aus (3) und untersuchen seinen Zusammenhang mit g unter Zuhilfenahme von (16) und (14)

$$\begin{aligned} \check{g} &= JGJ_0^{-1} = J(1 - DC)^{-1} DC J_0^{-1} \\ &= J(1 - \Delta)^{-1}(1 - DC + DCJ_0^{-1}J) \\ &\quad \cdot (1 - DC)^{-1} DC J_0^{-1} \\ &= J(1 - \Delta)^{-1} DC J_0^{-1} [1 + J(1 - DC)^{-1} DC J_0^{-1}]. \end{aligned} \quad (17)$$

Durch Vergleich mit (16) und Auflösung nach \check{g} folgt:

$$\check{g} = g(1 + \check{g}) = (1 - g)^{-1}g = g + g^2 + g^3 + \dots \quad (18)$$

Wir werden später den einfacheren Ausdruck \check{g} berechnen und als eine Summe von g -Potenzen deuten können.

Es bleibt noch die Reduktion der einzeitigen Gl. (5) mit nunmehr bekanntem Operator g von (19) auf

eine Gleichung mit nur vierkomponentiger Wellenfunktion durchzuführen. Zu diesem Zwecke werden zunächst die normierten Diracschen Lösungen $u_\alpha(\vec{p}, \epsilon)$ für freie Teilchen herangezogen und als unitäre Matrizen $u_{\alpha\epsilon} = u$ und $u_{\epsilon\alpha}^* = u^+$ benutzt, um Gl. (5) von den Spinorindizes $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ zu transformieren auf die Indizes $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots$, welche den Eigenzuständen für Energie und Spin der freien Teilchen zuzuordnen sind. Wir transformieren ψ und g in diesem Sinne durch

$$\psi = u_1 u_2 \psi', \quad g' = u_1^+ u_2^+ g u_1 u_2 \quad (19)$$

und erhalten für die gestrichenen Größen wiederum Gl. (5), nur daß die 16 Komponenten von $\psi' = \psi'_{\epsilon_1 \epsilon_2}$ nunmehr den positiven und negativen Eigenwerten der Energien und Spins beider Teilchen zuordnen sind. g' können wir durch g aus (17) und (18) ersetzen, wenn wir das dortige G der gleichen Transformation wie g' in (19) unterziehen. Diese Transformation von G aber führen wir durch, indem wir für G' die gleiche topologische Gesamtheit (3) wie bisher für G ansetzen und die in G enthaltenen topologischen Elemente wie Linien und Punkte ihrer analytischen Bedeutung entsprechend transformieren, wie das in Abschnitt 3 durchgeführt werden soll.

Im folgenden lassen wir zur Vereinfachung die Striche an den transformierten Größen fort. Weiterhin werden die 16 Komponenten von ψ explizit nur nach den Energieeigenwerten unterschieden, und zwar vorübergehend nur durch einen Index ϵ . $\epsilon = 0$ und $\psi_0 \equiv a$ entspricht den Zuständen mit positiver Energie beider Teilchen; die 3 übrigen Kombinationen werden mit ψ_ϵ bezeichnet ($\epsilon = 1, 2, 3$). Jede der Komponenten a und ψ_ϵ besteht ihrerseits noch aus 4 Komponenten für die 4 Spinzustände beider Teilchen. Dann haben wir Gl. (5) nunmehr als ein System von 4 Gleichungen für a und ψ_ϵ zu schreiben:

$$a = g_{00}a + \sum_\epsilon g_{0\epsilon}\psi_\epsilon, \quad \psi_\epsilon = g_{\epsilon 0}a + \sum_\epsilon g_{\epsilon\epsilon'}\psi_{\epsilon'}. \quad (20)$$

Durch successives Einsetzen von ψ_ϵ aus der zweiten Gleichung in die erste erhalten wir eine Gleichung für a allein, deren Operator f durch eine Entwicklung dargestellt wird

$$a = fa, \quad f = g_{00} + \sum_\epsilon g_{0\epsilon}g_{\epsilon 0} + \sum_{\epsilon, \epsilon'} g_{0\epsilon}g_{\epsilon\epsilon'}g_{\epsilon' 0} + \dots \quad (21)$$

Alle Summationen führen nur über die Zwischenzustände $\epsilon \neq 0$. Ähnlich wie in (17) definieren wir wieder eine Größe \check{f} durch \check{g}_{00} und beschreiben sie gemäß (18) durch

$$\begin{aligned} \check{f} &= \check{g}_{00} = g_{00}(1 + \check{g}_{00}) + \sum g_{0\epsilon} \check{g}_{\epsilon 0}, \\ \check{g}_{\epsilon 0} &= g_{\epsilon 0}(1 + \check{g}_{00}) + \sum g_{\epsilon\epsilon'} \check{g}_{\epsilon' 0}. \end{aligned} \quad (22)$$

Die Komponenten $\check{g}_{\epsilon 0}$ lassen sich nun aus \check{f} in gleicher Weise eliminieren wie vorher die ψ_ϵ aus (20) und es wird mit (21)

$$\begin{aligned} \check{f} &= (0 | J G J_0^{-1} | 0) = f(1 + \check{f}) \\ &= (1 - f)^{-1} f = f + f^2 + f^3 + \dots \end{aligned} \quad (23)$$

Für \check{f} und f gilt das gleiche wie vorher für \check{g} und g . Wir werden \check{f} gemäß (23) berechnen und im Resultat als eine entsprechende Potenzreihe zu identifizieren haben.

Es wird sich weiter herausstellen, daß f von der Form

$$f = [\sqrt{m_1^2 + \vec{p}^2} + \sqrt{m_2^2 + \vec{p}^2} - W]^{-1} V \quad (24)$$

ist, so daß sich endgültig für die vierkomponentige Wellengleichung

$$Wa(\vec{p}) = [\sqrt{m_1^2 + \vec{p}^2} + \sqrt{m_2^2 + \vec{p}^2} - V] a(\vec{p}) \quad (25)$$

ergibt, in der der Operator $-V$ die Rolle der Wechselwirkungsenergie spielt und durch (24) und (23) sowie die Graphen G gegeben ist.

Damit ist die Aufgabe der Aufstellung einer einzeitigen Wellengleichung für die Teilchen m_1 und m_2 formal gelöst. Es bleibt natürlich noch die schwierige analytische Auswertung von G , J_0^{-1} , f und V , welche in den nächsten Abschnitten durchgeführt wird und die analytische Darstellung für V liefert. Im dritten Abschnitt wird daher zunächst eine analytische Darstellung für G gegeben. Aus Abschnitt 4 wird weiter ein Ansatz für J_0^{-1} resultieren, für den sich die Identifizierung von f aus \check{f} später einfach durchführen läßt. Im nachfolgenden Abschnitt 5 läßt sich dann eine vollständige Darstellung von V erzielen.

3. Analytische Darstellung der Graphen

Es wird die Gesamtheit der Graphen D und C von Abb. 1 betrachtet, von der einige Graphen als Beispiele in dieser Abb. wiedergegeben sind. Bei einer Darstellung im Ortsraum werden alle Punkte und Linienenden numeriert. Die Fermionenlinien sind dann zu ersetzen durch die Vakuumerwartungswerte:

$$\begin{aligned} \bullet \xrightarrow[p]{\hspace{1cm}} \bullet^2 &= \langle \epsilon P \bar{\psi}_1 \psi_2 \rangle_0 \\ &= -i(2\pi)^{-4} \int dp e^{-ipx_{12}} (m - p^{-1}). \end{aligned} \quad (26)$$

Hierbei ist $dp = dp_0 d\vec{p}$ und $px = p_0 x^0 - \vec{p} \vec{x}$ sowie $p = \gamma^\mu p_\mu = \beta p_0 - \beta \vec{\alpha} \vec{p}$. Die γ^μ , β und $\vec{\alpha}$ sind die Diracschen und Paulischen Spinmatrizen. m ist die Masse des Teilchens, welches der jeweiligen Fermionenlinie zugeordnet wird. Die Spinorindizes werden längs der Fermionenlinien miteinander verbunden. Eine Mesonenlinie wird ersetzt durch den entsprechenden Vakuumerwartungswert des Mesonenfeldes φ :

$$\begin{array}{c} \bullet \cdots \cdots \cdots \bullet \\ | \quad | \\ 1 \quad 2 \end{array} = \langle P \varphi_1 \varphi_2 \rangle_0 = -i(2\pi)^{-4} \int dk e^{-ikx_{12}} (\mu^2 - k^2)^{-1}. \quad (27)$$

μ ist die Mesonmasse. Die Integrationen dk und $d\mu$ gehen über den gesamten Bereich. An den Singularitäten ist so zu integrieren, als ob m und μ einen negativ imaginären Anteil $-i\delta$ enthalten würden ($\delta \rightarrow 0$). Bei Photonen ist $\mu = 0$ und $-i$ durch $+i$ zu ersetzen. Für die Punkte schließlich ist einzusetzen:

$$\begin{array}{c} 1 \\ \bullet \cdots \cdots \cdots \bullet \\ | \quad | \\ \gamma \end{array} = -ig\gamma_1 \int dx_1. \quad (28)$$

g ist die Kopplungskonstante des Mesonenfeldes. dx_1 deutet die Integration über die Variable 1 an. γ ist eine Größe, die von der Art der Mesonen sowie ihrer Kopplung an das Fermionenfeld abhängt. Bei skalaren Mesonen und skalarer Kopplung zum Beispiel ist $\gamma = 1$. Bei Photonen ist $\gamma = \gamma_{\alpha\beta}^{\mu\nu}$, gleich den Diracschen γ^μ -Matrizen. Die Indizes α , β werden längs der Fermionenlinien verbunden, und μ längs der Mesonenlinie. Die beiden nach rechts auslaufenden Fermionenlinien sind im Falle der Bethe-Salpeter-Gl. (4) durch die Wellenfunktion $\Psi_{\alpha_1 \alpha_2}(x_1 x_2)$ zu ersetzen. Die beiden nach links auslaufenden Fermionenlinien dagegen werden wie in (26) behandelt. Das Glied $VD\Phi$ von (4) bleibt unberücksichtigt, da es ohnehin herausfällt, wie in Abschnitt 2 gezeigt wurde.

Durch diese Vorschriften ist eine vollständige analytische Beschreibung der Graphen gegeben. Sämtliche symbolischen Gleichungen der ersten Abschnitte lassen sich als Matrixgleichungen deuten, insbesondere Gl. (3), nach der die Gesamtheit G aus den Graphen DC besteht, sowie der Gesamtheit aller Produktgraphen, die sich aus den DC bilden lassen. Als Indizes dieser Matrizen fungieren dabei die Spinorindizes α_1 und α_2 (und entsprechend andere Zahlen statt 1 und 2), sowie die Ortsvariablen x_1^μ und x_2^μ als kontinuierliche Indizes. Die Zahl der Mesonenlinien eines Graphen aus G sei n . Dann ist die Zahl der Punkte gleich $2n$ und die Zahl

der Linienstücke von Fermionen ebenfalls $2n$, wenn wir die nach rechts auslaufenden Enden nicht mitzählen, da sie unbezeichnet bleiben. Die Faktoren g , $-i$ und $(2\pi)^{-4}$ von (26) bis (28) ergeben zusammengefaßt $g^{2n} (2\pi)^{-12n} (-i)^{5n}$. Wir führen zur Abkürzung die Konstante $\lambda = g^2 (2\pi)^{-3}$ ein und erhalten dann $(\lambda/2\pi i)^n (2\pi)^{-8n}$ für die Zusammenfassung dieser Faktoren.

Die Impulsdarstellung der Graphen erhalten wir durch Ausführung aller x -Integrationen an den $2n$ Punkten. Unter Hinzufügung jeweils eines Faktors $(2\pi)^{-4}$ ergeben sich an allen Punkten δ -Funktionen für die anliegenden p - und k -Variablen, welche gemäß (26) sowie (27) an den benachbarten Linien auftreten und alle verschieden bezeichnet werden:

$$p_1 \begin{array}{c} \bullet \\ \underset{k}{\cdots} \end{array} p_2 = \gamma \delta [(p_1)_\mu + k_\mu - (p_2)_\mu]. \quad (29)$$

Dieses Resultat bleibt auch an den Enden des Graphen richtig, wenn in (4) von $\Psi_{\alpha_1 \alpha_2}(x_1 x_2)$ zur Fourier-Transformierten $\Psi'_{\alpha_1 \alpha_2}(p' p'')$ übergegangen wird. An die rechts auslaufenden Enden des Graphen wird Ψ' dann mit den Impulsbezeichnungen p'_1 und p''_2 angeschlossen. Der allgemeinste Graph aus der durch (3) und Abb. 1 gegebenen Gesamtheit G wird durch die Abb. 2 und 3 wiedergegeben und mit $G_{mn\tau}$ bezeichnet.

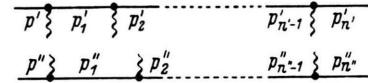


Abb. 2. Allgemeinster Graph ohne geschlossene Fermionenlinien. Die an den $n' + n'' = 2n$ Punkten auslaufenden Enden der Mesonenlinien werden auf willkürliche Weise miteinander verbunden und mit k_1, k_2, \dots, k_n bezeichnet. Auch ist die Verteilung der Punkte über die obere und untere Linie beliebig.

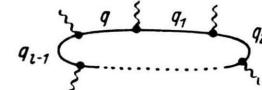


Abb. 3. Darstellung einer geschlossenen Fermionenlinie (Ring) mit l Mesonenlinien; Bestandteil eines Graphen G .

Er besteht aus den Graphen von Abb. 2 mit einer willkürlichen Anzahl m von geschlossenen Fermionenlinien vom Typ der Abb. 3, die wir weiterhin abkürzend als „Ringe“ bezeichnen wollen. Wir nehmen an, daß unter diesen m Ringen m' zum Teilchen 1 und $m-m'$ zum Teilchen 2 gehören. Bei verschiedenen Teilchen 1 und 2 tritt in der Gesamtheit aller Graphen jeder Ring für jedes der

beiden Teilchen einmal auf. Die Anzahl der Mesonenlinien des Graphen ist n . Sie werden mit $\pm k_1$, bis $\pm k_n$ bezeichnet, die Vorzeichen sind wegen (27) beliebig. Die Gesamtzahl der Punkte ist $2n$. Davon befinden sich n' und n'' auf der oberen und unteren Hauptlinie von Abb. 2 und l_1, l_2, \dots, l_m auf den Ringen $1, 2, \dots, m$. Zwischen diesen Zahlen besteht die Relation

$$n' + n'' + \sum_{\mu=1}^m l_{\mu} = 2n. \quad (30)$$

Alle Graphen mit gleichem m und n werden als $G_{mn\tau}$ bezeichnet. Durch den Index τ werden unterschieden: die verschiedenen Zahlen n', n'', l_1, \dots, l_m und die verschiedenen Möglichkeiten, die $2n$ Mesonenenden miteinander zu verbinden.

Infolge der δ -Funktionen (29) an allen $2n$ Punkten herrschen Relationen zwischen den k -, p - und q -Variablen. Der Übergang von den Gln. (26), (27), (28) auf (29) hat zur Folge, daß in den δ -Funktionen jede Variable genau einmal mit positivem und einmal mit negativem Vorzeichen auftritt. Ausgenommen sind die freien Enden, von denen p' und p'' aus Abb. 2 nur positiv und $p'_{n'}$ sowie $p''_{n''}$ nur negativ auftreten sollen. Die Relationen sind von der Form:

$$\begin{aligned} p'_{\nu} &= p' + \Sigma'_{\nu} k, & p''_{\nu} &= p'' + \Sigma''_{\nu} k, \\ q^{(\mu)}_{\lambda} &= q^{(\mu)} + \Sigma^{(\mu)}_{\lambda} k. \end{aligned} \quad (31)$$

Unter $\Sigma'_{\nu} k$ sei die Summe über alle die k_{ν} verstanden, welche zwischen p' und p'_{ν} ein- oder auslaufen unter Berücksichtigung ihrer jeweiligen Vorzeichen. Entsprechendes gilt für $\Sigma''_{\nu} k$ und $\Sigma^{(\mu)}_{\lambda} k$. Zweckmäßig zeichnen wir einen Graphen so, daß seine Punkte nicht übereinander stehen, sondern eine Reihenfolge von links nach rechts ergeben. Dann benutzen wir die Willkür in der Vorzeichenwahl der k_{ν} dazu, um in den Summen (31) alle diejenigen k_{ν} , deren Mesonenlinien von den zugehörigen Punkten aus nach rechts ausgelaufen sind, mit positivem Vorzeichen zu schreiben. Diejenigen k_{ν} , deren Mesonenlinien von links eingelaufen sind, schreiben wir negativ.

Läuft irgendeine Mesonenlinie k_{σ} zwischen p' und p'_{ν} zunächst aus und dann wieder ein, so tritt k_{σ} je einmal mit beiden Vorzeichen in Σ'_{ν} auf und fällt also aus der Summe heraus. Unter den gleichen Umständen ist auch bei p'' oder $q^{(\mu)}$ ein solches k_{σ} nicht mehr in den Summen $\Sigma''_{\nu} k$ oder $\Sigma^{(\mu)}_{\lambda} k$ enthalten. Betrachten wir Gl. (31) für $q^{(\mu)}_{l\mu}$, so muß wegen $q^{(\mu)}_{l\mu} = q^{(\mu)}$ (Abb. 3) die Summe über alle k_{ν} verschwinden, die einen Ring anlaufen:

$$\Sigma^{(\mu)}_{l\mu} k = 0, \quad \mu = 1, 2, \dots, m. \quad (32)$$

Diese Gln. (32) gelten sowohl für alle k_{ν} eines Ringes, als auch für diejenigen k_{ν} allein, die aus dem Ring herausführen. Denn die übrigen k_{ν} , welche innerhalb des Ringes auslaufen und wieder zurückkehren, ergänzen sich ohnehin zu Null. Bilden wir weiter die Summe der Summen (32) über alle Ringe μ , so erhalten wir genau die Summe über alle Mesonenlinien, die von den Hauptlinien aus zu den Ringen laufen. Diese Summe verschwindet nach (32) also ebenfalls. Weiter können wir die Relation

$$p' + p'' = p'_{n'} + p''_{n''} \quad (33)$$

aufstellen. Beide Seiten der Gleichung unterscheiden sich nur um die zugehörigen Summen von (31), nämlich $\Sigma'_{n'} k + \Sigma''_{n''} k$. Diese gemeinsame Summe verschwindet aber. Denn in ihr sind, wie wir gesehen haben, alle Mesonenlinien nicht enthalten, die zur gleichen Hauptlinie zurückkehren. Auch kompensieren sich notwendig diejenigen k_{ν} , welche zwischen den Hauptlinien hin- und herlaufen. Es bleiben nur noch die Linien, die zu den Ringen auslaufen, deren Summe aber ebenfalls verschwindet. Daher gilt (33).

Die Impulsintegrationen laufen über alle p -, q - und k -Impulse außer über p' und p'' . Ein großer Teil dieser Integrationen dient dazu, die δ -Funktionen (29) zu beseitigen; so die Integrationen über alle $p'_1, p'_2, \dots, p'_{n'}$ sowie $p''_1, p''_2, \dots, p''_{n''}$ und die $q_1^{(\mu)}, q_2^{(\mu)}, \dots, q_{l\mu-1}^{(\mu)}$ für alle $\mu = 1, 2, \dots, m$. Diese Variablen werden trotzdem anschließend noch gelegentlich weiter verwendet, dann allerdings nur noch als Abkürzungen für die Relationen (31). Es bleiben dann von den $2n$ δ -Funktionen noch genau m übrig, nämlich für jeden Ring eine. Diese δ -Funktionen enthalten die Relationen (32), wie man sich leicht überzeugt. Bezeichnen wir mit $G'_{mn\tau}$ den zu $G_{mn\tau}$ gehörigen Graphen ohne die Integrationen sowie die eingangs untersuchten Konstanten, so ist

$$G_{mn\tau} = \lambda^n (2\pi i)^{-n} \int \dots \int dk_1 \dots dk_n \cdot \prod_{\mu=1}^m \delta(\Sigma^{(\mu)}_{l\mu} k) dq^{(\mu)} G'_{mn\tau}. \quad (34)$$

Für die Graphen $G'_{mn\tau}$ haben Fermionenlinien, Mesonenlinien und Punkte nunmehr die vereinfachte Bedeutung:

$$\begin{aligned} \overbrace{}^p &= (m-p)^{-1}, \\ \overbrace{}^k &= (\mu^2 - k^2)^{-1}, \\ \overbrace{}^{\frac{p}{k} + \frac{p+k}{k}} &= \gamma. \end{aligned} \quad (35)$$

Ausgenommen von Vorschrift (35) bleiben die beiden rechten Enden des Graphen, welche frei bleiben, beziehungsweise in der Bethe-Salpeter-Gleichung an die Wellenfunktion $\Psi_{\alpha_1 \alpha_2}(p'_n, p''_{n'})$ anschließen.

Weiter soll die Transformation (19) aus Abschnitt 2 für die Bethe-Salpeter-Gleichung wie auch für die Graphen G durchgeführt werden. Die neue Wellenfunktion ist $\Psi = \Psi_{\varepsilon_1 \varepsilon_2}$, während wir die neuen Graphen dadurch erhalten, daß wir in den bisherigen Graphen die beiden Fermionenlinien von Abb. 2 links mit $u^+(p')$ und $u^+(p'')$ und rechts mit $u(p'_n)$ und $u(p''_{n'})$ multiplizieren. Nun fügen wir links von jedem Punkt des Graphen einen Faktor $\beta^{-1} u(p_1) \cdot u^+(p_1) \beta$ und rechts von jedem Punkt einen Faktor $u(p_2) u^+(p_2)$ ein. Alles bleibt unverändert wegen $uu^+ = 1$. p_1 und p_2 sollen die zu den anliegenden Fermionenlinien gehörenden Variablen sein. Wir definieren $\bar{u} = u^+ \beta$ und vereinigen nunmehr mit jedem Punkt die Größen

$$\begin{aligned} p_1 - \bullet - p_2 &= \bar{u}_{\varepsilon_1} \cdot (\vec{p}_1) \gamma u_{\varepsilon_2}(\vec{p}_2) \\ &\equiv \Gamma_{\varepsilon_1 \varepsilon_2}(\vec{p}_1, \vec{p}_2) = \Gamma. \end{aligned} \quad (36)$$

An Stelle der 4 freien Energie- und Spinzustände ε unterscheiden wir weiterhin durch den Index ε explizit nur noch die beiden Energiezustände (\pm), und zwar mit $\varepsilon = \pm 1$. Diese Indizes, genau wie die nicht explizit dargestellten Spinindizes werden längs der Fermionenlinien miteinander verknüpft. Für die Fermionenlinien folgt dann wegen (36) und dem vorhergehenden Text die Darstellung

$$\begin{aligned} \frac{p}{\varepsilon E(\vec{p}) - p_0} &= u^+ (m - p)^{-1} \beta^{-1} u \\ &= (\varepsilon E(\vec{p}) - p_0)^{-1}, \quad \varepsilon = \pm 1, \quad E = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2}. \end{aligned} \quad (37)$$

Je nach den Teilchen 1, 2 und ihren Massen m_1, m_2 unterscheiden wir in (37) die Energien $E^{(1)}$ und $E^{(2)}$. Die Mesonenlinien bleiben unverändert. Wir gehen lediglich zu einer Darstellung über, die die Zeitkoordinate auszeichnet:

$$\begin{aligned} \sim\!\sim\!\sim^k &= [\omega(\vec{k})^2 - k_0^2]^{-1}, \\ \omega &= \sqrt{\mu^2 + \vec{k}^2}. \end{aligned} \quad (38)$$

Schließlich führen wir noch entsprechend den Gl. (7), (10), (11) und (12) die Schwerpunkts- und Differenzimpulse P und p ein und beschränken uns wie dort auf Zustände, bei denen der Schwerpunkt ruht. Für die Anfangs- und Endimpulse der Graphen gilt mit (33):

$$p' + p'' = p'_n + p''_{n'} = P = (P_0, \vec{P}) = (W, 0). \quad (39)$$

In (33) drückt sich explizit die Gesamterhaltung von Energie und Impuls für alle Wechselwirkungen aus, die durch die Graphen der Gesamtheit G zwischen den beiden Teilchen vermittelt werden. Die Zeitkomponenten der Anfangsimpulse sind nach (6) und (7) zu ersetzen durch:

$$p'_0 = \zeta_1 W + p_0, \quad p''_0 = \zeta_2 W - p_0. \quad (40)$$

Für die Raumkomponenten der Anfangs- und Endimpulse der Graphen gilt

$$\vec{p}' = -\vec{p}'' = \vec{p}, \quad \vec{p}'_{n'} = -\vec{p}''_{n''} = \vec{p}'''. \quad (41)$$

Die Bethe-Salpeter-Gl. (13) ist damit analytisch vollständig beschrieben in der Form einer Matrixgleichung:

$$\Psi(W, p) = \int d p''' DC(W, p''') \Psi(W, p'''). \quad (42)$$

$\Psi = \Psi_{\varepsilon_1 \varepsilon_2}$ ist dabei eine Wellenfunktion, deren Komponenten nach den Zuständen freier Teilchen geordnet sind. DC ist eine durch Abb. 1 gegebene Gesamtheit von Graphen G_{mn} , die als Matrizen bzw. Integraloperatoren auf Ψ angewandt werden. Sie bestehen aus bestimmten, durch (34) gegebenen Integrationsvorschriften über die gleiche Gesamttheit von Graphen G'_{mn} , für deren graphische Elemente nach (36) bis (38) analytische Ausdrücke einzusetzen sind. Die Anfangs- und Endzustände des Graphen sind nach (40) und (41) durch die Differenzkoordinaten zu ersetzen, von denen Ψ abhängt. Dann folgen alle übrigen Variablen aus der Impulsbilanz an den Punkten.

4. Statische Wechselwirkung als Näherung

Bevor wir die allgemeine Berechnung des Operators V der Zweiteilchen-Wechselwirkung von (25) aus der Bethe-Salpeter-Gl. (13) in Angriff nehmen, werden wir V unter vereinfachten Voraussetzungen näherungsweise berechnen, um einen zweckmäßigen Ansatz für J_0^1 zu erzielen. Wir nehmen erstens an, daß die Kopplungskonstante g bzw. λ klein sei und vernachlässigen alle Graphen von höherer als erster Ordnung in g^2 bzw. λ . Die Bethe-Salpeter-Gleichung ist durch (42) gegeben, und die in ihr enthaltene Gesamtheit der Graphen DC besteht dann nur aus einem einzigen Graphen, nämlich dem ersten Graphen aus C in Abb. 1 c. Für diesen Graphen setzen wir (34) mit $m = 0$ sowie $n = 1$ an und entnehmen (36) bis (38) die analytischen Ausdrücke für die Bestandteile des Graphen. Dann lautet mit (40) und (41) die genäherte Bethe-Salpeter-Gleichung

$$\Psi_{\varepsilon\eta}(p) = \sum_{\varepsilon'\eta'} \frac{\lambda}{2\pi i} \int \frac{dk \Gamma_{\varepsilon\varepsilon'}^{(1)}(\vec{p}, \vec{p} + \vec{k}) \Gamma_{\eta\eta'}^{(2)}(-\vec{p}, -\vec{p} - \vec{k}) \Psi_{\varepsilon'\eta'}(\vec{p} + \vec{k})}{(\varepsilon E^{(1)}(\vec{p}) - \zeta_1 W - \Gamma_0)(\eta E^{(2)}(\vec{p}) - \zeta_2 W + p_0)(\omega(\vec{k})^2 - k_0^2)}. \quad (43)$$

Weiter nehmen wir an, daß die Bindungsenergie $m_1 + m_2 - W$ klein sei gegen die Ruhmassen m_1 und m_2 der Teilchen. Das bedeutet gleichzeitig, daß die in dem gebundenen Zustand auftretenden Teilchengeschwindigkeiten klein sind gegen die Lichtgeschwindigkeit. Unter diesen Umständen können wir die Ausbreitungsgeschwindigkeit des wechselwirkenden Mesonenfeldes genähert als unendlich groß ansehen und unsere zweite vereinfachende Voraussetzung dahingehend präzisieren, daß wir die Retardierung in der Wechselwirkung vernachlässigen, uns also auf die Betrachtung der statischen Wechselwirkung beschränken. Die Funktion $\Delta_F(x)$ vermittelt die Wechselwirkung, ist in (27) dargestellt und hängt von den Differenzkoordinaten $x = x_1 - x_2$ der wechselwirkenden Punkte ab. Die Retardierung zu vernachlässigen, bedeutet, diese Funktion zu ersetzen durch

$$\Delta_F(x^0, \vec{x}) \rightarrow \delta(x^0) \int d\tau \Delta_F(\tau, \vec{x}). \quad (44)$$

Denn in (44) wird die Wechselwirkung Δ_F , welche von der Zeitdifferenz x^0 der beiden Teilchen abhängt, über alle Zeiten $x^0 = \tau$ addiert und als gleichzeitige Wirkung $\delta(x^0)$ behandelt. Die Wechselwirkung ist also in dieser Näherung nicht mehr von den verschiedenen Eigenzeiten der beiden Teilchen abhängig. Im Integral über alle x^0 ist dagegen die Wechselwirkung die gleiche wie vorher, wie aus (44) direkt ersichtlich ist. Die entsprechende Näherung für die Mesonenlinien im Impulsraum entsteht, wenn wir den Übergang (44) in Gl. (27) bzw. (38) durchführen. Das Resultat besteht darin, daß der Ausdruck $(\omega^2 - k_0^2)^{-1}$ für die Mesonenlinie übergeht in ω^{-2} , also

$$(\omega^2 - k_0^2)^{-1} \rightarrow \omega^{-2}, \quad (45)$$

so daß diese zweite Voraussetzung nur darin besteht, in (43) k_0^2 rechts im Nenner zu streichen.

Die Gl. (43) läßt sich dann auf folgende Weise behandeln: Wir ersetzen die Koordinate $p + k$ durch p' und die Integration dk entsprechend durch $dp' = dp_0 dk$. Dann können wir den Integraloperator von (43) zweckmäßig in drei Teile aufspalten:

$$\Psi_{\varepsilon\eta} = A_{\varepsilon\eta} \sum_{\varepsilon'\eta'} B_{\varepsilon\eta, \varepsilon'\eta'} J \Psi_{\varepsilon'\eta'}. \quad (46)$$

A und B können dabei nach (43) gegeben werden durch

$$A_{\varepsilon\eta} = \frac{(\varepsilon E^{(1)} + \eta E^{(2)} - W)}{i(\varepsilon E^{(1)} - \zeta_1 W - p_0)(\eta E^{(2)} - \zeta_2 W + p_0)},$$

$$B_{\varepsilon\eta, \varepsilon'\eta'} = \frac{\lambda d\vec{k} \Gamma_{\varepsilon\varepsilon'}^{(1)} \Gamma_{\eta\eta'}^{(2)}}{(\varepsilon E^{(1)} + \eta E^{(2)} - W) \omega^2}, \quad (47)$$

und J ist genau der durch (9) gegebene Operator, welcher Ψ überführt in die einzeitige Wellenfunktion ψ .

Zunächst bilden wir durch Integration den Ausdruck

$$JA_{\varepsilon\eta} = \frac{1}{2} (\varepsilon + \eta) = \delta_{\varepsilon\eta} \varepsilon. \quad (48)$$

Dieses Resultat entsteht nach (7A) aus dem Anhang durch Partialbruchzerlegung von (47) und Berücksichtigung der Tatsache, daß die Massen m_1 und m_2 einen verschwindenden negativ imaginären Anteil $-i\delta$ enthalten. Wir können daher durch Anwendung von J auf (46) einfach zur einzeitigen Gleichung übergehen und erhalten

$$\psi_{\varepsilon\eta} = \delta_{\varepsilon\eta} \psi_{\varepsilon\varepsilon}, \quad \psi_{\varepsilon\varepsilon} = \sum_n \varepsilon B_{\varepsilon\varepsilon, \eta\eta} \psi_{\eta\eta}. \quad (49)$$

Von dieser Gleichung gehen wir auf die nur vierkomponentige Gleichung für $\psi_{++} = a$ über mit der Entwicklung entsprechend den Gleichungen (21) und (22), vernachlässigten jedoch die höheren Potenzen der Entwicklung wegen $B^n \sim \lambda^n \rightarrow 0$. Es bleibt die Gleichung

$$a = B_{++, ++} a. \quad (50)$$

Wenn wir nun B aus (47) einsetzen und entsprechend umformen, so wird

$$Wa(\vec{p}) = [\sqrt{m_1^2 + \vec{p}^2} + \sqrt{m_2^2 + \vec{p}^2} - V_0] a(\vec{p}) \quad (51)$$

mit dem Operator V_0 des Wechselwirkungspotentials:

$$V_0 a(\vec{p}) = \lambda \int \omega^{-2} dk \Gamma_{++}^{(1)}(\vec{p}, \vec{p} + \vec{k}) \Gamma_{++}^{(2)}(-\vec{p}, -\vec{p} - \vec{k}) a(\vec{p} + \vec{k}), \quad (52)$$

welcher im wesentlichen das Yukawa-Potential beschreibt.

Dieses hinlänglich bekannte Resultat für den Spezialfall statischer Wechselwirkung und schwacher Kopplung ist für uns nur von besonderem Interesse, da wir zur Berechnung der allgemeinen einzeitigen Gleichung und deren Wechselwirkungsoperator V den Gln. (23), (24) und (25) entsprechend noch eine zweckmäßige Annahme für J_0^{-1} machen müssen. Wir werden nun J_0^{-1} so definieren, daß

dieser Operator in der Näherung dieses Abschnitts reziprok zu J ist, d. h. also $\psi_{++} = a$ in Ψ_{++} überführt. Zur Bestimmung von J_0^{-1} betrachten wir (45) im Falle $\varepsilon = \eta = 1$ und berücksichtigen (49) und die Bedeutung von J :

$$\begin{aligned}\Psi_{++} &= A_{++} \sum_{\varepsilon\eta} B_{++}, \varepsilon\eta J\Psi_{\varepsilon\eta} = A_{++} \sum_{\varepsilon\eta} B_{++}, \varepsilon\eta \psi_{\varepsilon\eta} \\ &= A_{++} \psi_{++}.\end{aligned}\quad (52\text{a})$$

A_{++} beschreibt also gerade den Teil von Ψ_{++} , der von der Zeitkomponente p_0 der Differenzkoordinate abhängt und stellt in dieser Näherung also genau den reziproken Operator von J dar:

$$\begin{aligned}JJ_0^{-1} &= 1, \quad J_0^{-1} = A_{++} \\ &= \frac{(E^{(1)} + E^{(2)} - W)}{i(E^{(1)}(\vec{p}) - \zeta_1 W - p_0)(E^{(2)}(\vec{p}) - \zeta_2 W + p_0)}.\end{aligned}\quad (53)$$

Mit diesem Ansatz (53) für J_0^{-1} werden wir in den folgenden Abschnitten den Wechselwirkungsoperator V der einzeitigen Gleichung ohne Schwierigkeiten berechnen können.

5. Bestimmung der einzeitigen Wellengleichung

In diesem Kapitel wird die Berechnung des Wechselwirkungsoperators V von (25) durchgeführt. Nach (23) und (24) hängen V und \check{f} direkt mit G zusam-

men, der Gesamtheit aller Graphen $G_{mn\tau}$ von (3). Wir können daher \check{f} in Termen $\check{f}_{mn\tau}$ bestimmen:

$$\check{f} = \sum \check{f}_{mn\tau}, \quad \check{f}_{mn\tau} = (0 | JG_{mn\tau} J_0^{-1} | 0).\quad (54)$$

In diesem Ausdruck ist J durch (9), J_0^{-1} durch (53) und $G_{mn\tau}$ durch (34) gegeben. $G'_{mn\tau}$ aus (34) wird durch einen Feynman-Graphen aus der Gesamtheit G von (3) repräsentiert, dessen allgemeinste Darstellung durch Abb. 2 und m Ringe vom Typ der Abb. 3 wiedergegeben ist. Die analytische Bedeutung der Figur folgt aus (36) bis (38). Die beiden Nullen in (54) für den Anfangs- und Endzustand bedeuten, daß alle freien Linienenden des Graphen sich im positiven Energiezustand $\varepsilon = +1$ befinden. Wir erfüllen diese Bedingung, beschriften nunmehr auch die Linien am rechten Ende des Graphen und fügen in (34) die Integration $dp_0/2\pi i$ über die Zeitkomponente des Anfangsimpulses hinzu. Dann erhalten wir genau $f_{mn\tau}$ gemäß (9), (53) und (54). Für alle Mesonenlinien nach (37) führen wir eine Partialbruchzerlegung durch

$$[\omega^2 - k_0^2]^{-1} = (2\omega)^{-1}[(\omega - k_0)^{-1} + (\omega + k_0)^{-1}]\quad (55)$$

und schreiben bei Unterscheidung von Zeit- und Ortskomponenten aller Variablen von $f_{mn\tau}$ nach (54) und (34) zunächst

$$f_{mn\tau} = \lambda^n \int \frac{d\vec{k}_1 \dots d\vec{k}_n}{2\omega_1 \dots 2\omega_n} \prod_{\mu=1}^m \delta(\Sigma_{e_\mu}^{(\mu)} \vec{k}) d\vec{q}^{(\mu)} \sum_{\varepsilon} \Gamma_1 \dots \Gamma_{2n} f_{mn\tau}. \quad (56)$$

Die Summation ε geht über alle Energiezustände $\varepsilon_1 = \pm 1, \varepsilon_2 = \pm 1, \dots$ der inneren Fermionenlinien. Die $\Gamma_1 \dots \Gamma_{2n}$ werden an allen $2n$ Punkten gemäß (36) angeschlossen. In $f_{mn\tau}$ sind zusammengezogen: der Energiefaktor $(E^{(1)} + E^{(2)} - W)$ aus (53), alle Fermionenlinien nach (37), alle Mesonenlinien nach (38) und (55) bis auf jeweils einen Faktor $(2\omega)^{-1}$, und die Integrationen und δ -Funktionen von (57) für die Zeitkomponenten der gleichen Variablen; dazu die Integration $dp_0/2\pi i$. Wir lassen die Null im Index der Zeitkomponenten fort und schreiben dann

$$\begin{aligned}f_{mn\tau\varepsilon} &= (E_{n'}^{(1)} + E_{n''}^{(2)} - W) \cdot \int \frac{dp}{2\pi i} \frac{dk_1}{2\pi i} \dots \frac{dk_n}{2\pi i} \prod_{\mu=1}^m \delta(\Sigma_{e_\mu}^{(\mu)} k) dq^{(\mu)} \\ &\cdot (\varepsilon_0' E_0^{(1)} - p')^{-1} (\varepsilon_1' E_1^{(1)} - p_1')^{-1} \dots (\varepsilon_{n'}' E_{n'}^{(1)} - p_{n'}')^{-1} \cdot (\varepsilon_0'' E_0^{(2)} - p'')^{-1} \dots (\varepsilon_{n''}'' E_{n''}^{(2)} - p_{n''}'')^{-1} \\ &\cdot \prod_{\mu=1}^m (\varepsilon_0^{(\mu)} E_0^{(\mu)} - q^{(\mu)})^{-1} \dots (\varepsilon_{l_{\mu}-1}^{(\mu)} E_{l_{\mu}-1}^{(\mu)} - q_{l_{\mu}-1}^{(\mu)})^{-1} \prod_{\nu=1}^n [(\omega_\nu - k_\nu)^{-1} + (\omega_\nu + k_\nu)^{-1}], \\ &\varepsilon_0' = \varepsilon_0'' = \varepsilon_{n'}' = \varepsilon_{n''}'' = +1.\end{aligned}\quad (57)$$

In dieser Formel sind die Impulse p' und p'' durch (40) gegeben, p'_ν, p''_ν und $q_\nu^{(\mu)}$ durch (31). Die Energien enthalten gemäß (37) und (38) die zugehörigen Variablen. Alle Indizes $\varepsilon', \varepsilon'', \varepsilon^{(\mu)}$ beschreiben ganz bestimmte Energiezustände ± 1 und sind auf der linken Seite durch ε repräsentiert.

Zur Auswertung von (58) verwenden wir (40) und (31) und führen entsprechend ein:

$$\alpha_\nu = E_\nu^{(1)} - \varepsilon_\nu' [\zeta_1 W + \Sigma_\nu' k], \quad \beta_\nu = E_\nu^{(2)} - \varepsilon_\nu'' [\zeta_2 W + E_\nu'' k], \quad \alpha_\nu'' = E^{(1,2)}(q_\nu^{(\mu)}) - \varepsilon_\nu^{(\mu)} \Sigma_\nu^{(\mu)} k. \quad (58)$$

$E^{(1,2)}$ ist dabei $E^{(1)}$ oder $E^{(2)}$, je nachdem, ob der zugehörige Ring ein virtuelles Teilchen 1 oder 2 beschreibt. Mit (58) erhalten wir für $f_{mn\tau\epsilon}$ die Darstellung:

$$\begin{aligned} f_{mn\tau\epsilon} &= \Pi\epsilon \cdot (\alpha_{n'} + \beta_{n'}) \int \frac{dk_1}{2\pi i} \cdots \frac{dk_n}{2\pi i} \prod_{\mu=1}^m \delta(\sum_{l_\mu} k) Y^{(0n')} Y_1 \dots Y_m Z, \\ Y_\mu &= \int \frac{dq^{(\mu)}}{2\pi i} \prod_{\nu=0}^{l_\mu-1} (\alpha_\lambda^\mu - \varepsilon_\lambda^\mu q^{(\mu)})^{-1}, \quad Y^{(0n')} = \int \frac{dp}{2\pi i} \prod_{\nu=0}^{n'} (\alpha_\nu - \varepsilon_\nu p)^{-1} \prod_{\nu=0}^{n''} (\beta_\nu + \varepsilon_\nu p)^{-1}, \\ Z &= \prod_{\nu=1}^n [(\omega_\nu - k_\nu)^{-1} + (\omega_\nu + k_\nu)^{-1}]. \end{aligned} \quad (59)$$

Die Integrale Y_μ sowie $Y^{(0n')}$ lassen sich alle unabhängig voneinander auswerten und sind im Anhang in (1A) und (2A) sowie in (10A) bis (12A) behandelt. Wir zeichnen den Feynman-Graphen $f_{mn\tau}$ auf und betrachten etwa den μ -ten Ring. Das zugehörige Integral Y_μ für irgendeine Vorzeichenkombination ϵ ist gleich der Summe über alle erlaubten Punktfolgen P_μ , deren analytische Bedeutung durch (2A) gegeben ist. Da nach (56) aber über alle Vorzeichenkombinationen summiert wird, sind unter Einschluß dieser Summation alle $l_\mu!$ Permutationen der l_μ Punkte des Ringes μ auch erlaubte Punktfolgen. Nur haben wir die Liniensegmente je nachdem, ob sie nach links oder rechts gerichtet sind, gemäß (58) verschieden zu bezeichnen und jede Punktfolge noch mit einem Faktor $\Pi\epsilon = (-1)^R$ zu versehen. R ist dabei die Gesamtzahl der rückläufigen Linien. Außerdem müssen an den Punkten die $\Gamma = \Gamma_{\pm\pm}$ aus (57) so eingesetzt werden, wie es den Richtungen der anliegenden Liniensegmente entspricht (nach rechts: +, links: -).

Die Integration über $Y^{(0n')}$ wird gemäß (10A) bis (12A) durchgeführt, mit auslaufenden Linienenden. Die Liniensegmente β_ν der unteren Hauptlinie sind in Abb. 2 mit der umgekehrten Richtung, als es nach den Ausführungen des Anhangs erforderlich wäre, versehen, weil auch die entsprechenden ε_ν in (59) das umgekehrte Vorzeichen tragen. Als Ergebnis für $Y^{(0n')}$ entsteht (12A) mit dem begleitenden Text. Vom Faktor $(\alpha_0 + \beta_0)^{-1} (\alpha_{n'} + \beta_{n'})^{-1}$, den alle Punktfolgen von (12A) enthalten, hebt sich der zweite Teil wegen (59) fort und wir definieren die Punktfolgen P_0 des Integrals $Y^{(0n')}$ ohne diesen Faktor. Im übrigen gilt für $Y^{(0n')}$ das gleiche, was vorher zu Y_μ gesagt wurde. Unser vorläufiges Resultat hat die Form:

$$\begin{aligned} \sum_\epsilon \Gamma_1 \dots \Gamma_{2n} f_{mn\tau\epsilon} \\ = (\alpha_0 + \beta_0)^{-1} \int \frac{dk_1}{2\pi i} \cdots \frac{dk_n}{2\pi i} \prod \delta(\sum k) Z \\ \cdot \sum (-1)^R P_0 P_1 \dots P_m \Gamma'_1 \dots \Gamma'_{2n}. \end{aligned} \quad (60)$$

Die Summation besteht darin, daß für jeden Bestandteil des Feynman-Graphen einzeln alle möglichen Punktfolgen durch Permutation gebildet werden. Die Reihenfolge von Punkten verschiedener Bestandteile ist dabei zunächst nicht definiert.

Die Summe besteht aus $(n' + n'')! \prod_{\mu=1}^m l_\mu!$ Termen.

Die einzelnen Summanden $P_0 P_1 \dots P_m$ sollen zu einer gemeinsamen Darstellung zusammengefaßt werden. Wir betrachten zunächst einen Feynman-Graphen mit nur einem Ring, also die Zusammenfassung von $P_0 P_1$. Die beiden Komplexe P_0 und P_1 sind in Abb. 4 schematisch dargestellt mit ihren

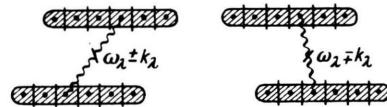


Abb. 4. Darstellung eines Produktes zweier Punktfolgen $P_0 P_1 [(\omega_\lambda - k_\lambda)^{-1} + (\omega_\lambda + k_\lambda)^{-1}]$. Die Vorzeichen von k_λ sind beliebig, aber in beiden Figuren entgegengesetzt.

Punkten, deren Anzahl oben und unten beliebig sein kann. Da wir uns nicht auf spezielle Kurvenformen festlegen wollen, sind diese nicht eingezeichnet. Die schraffierten Gebiete sollen irgendeinen beliebigen Verlauf der Kurven andeuten. Die Vertikallinien σ sind durch senkrechte Striche gekennzeichnet, was hier für ihre eindeutige Kennzeichnung zweckmäßiger erscheint. Die analytische Bedeutung der Punktfolge $P_0 P_1$ ist durch (2A) gegeben, also gleich dem Produkt über alle Vertikallinien, deren jeder die Bedeutung (2A) hat.

Der Ring ist mit dem übrigen Graphen durch Mesonenlinien verbunden, da er sonst Vakuumgraph wäre. Eine der Variablen dieser Linien muß nach (32) eliminiert werden. Die Relation (32) für diesen Ring ist in einer der δ -Funktionen von (60) enthalten. Wir wählen im Graphen willkürlich die Linie aus, die eliminiert werden soll, nennen sie k_λ und tragen sie in Abb. 4 ein. Den Faktor $[(\omega_\lambda - k_\lambda)^{-1} + (\omega_\lambda + k_\lambda)^{-1}]$ ziehen wir aus Z von (59) heraus und

fügen ihn dem Produkt $P_0 P_1$ hinzu. Da er die analytische Form hat wie die Summe zweier Vertikalstreifen, können wir ihn in unserer Darstellung durch einen zusätzlichen Strich mit einbeziehen. Wir tun dies gemäß Abb. 4 und erhalten zwei sonst gleiche Figuren, die sich nur durch verschiedene Laufrichtung und Bezeichnung des Strichs unterscheiden.

Es soll nun gezeigt werden, daß der in Abb. 4 dargestellte Term sich zerlegen läßt in

$$P_0 P_1 [(\omega_\lambda - k_\lambda)^{-1} + (\omega_\lambda + k_\lambda)^{-1}] = \Sigma P_{01}; \quad (61)$$

ΣP_{01} ist die Summe über alle Punktfolgen, die sich ergeben, wenn man die Reihenfolge der Punkte in P_0 und P_1 einzeln festhält, aber die Punkte gegeneinander variiert. Die Vertikalstreifen der P_{01} durchlaufen dabei beide Gebilde und gegebenenfalls auch noch die Mesonenlinie.

Die graphische Darstellung einer Partialbruchzerlegung wie etwa

$$\begin{aligned} & (a+b)^{-1} (c+d)^{-1} \\ &= (a+b+c+d)^{-1} [(a+b)^{-1} + (c+d)^{-1}] \end{aligned} \quad (62)$$

ist in Abb. 5 wiedergegeben. Diese Zerlegung wird jetzt auf die beiden Figuren von Abb. 4 angewandt. Eine erste Zerlegung ist in Abb. 6a und b dargestellt; eine zweite in Abb. 6c, d, e, f. Führt man

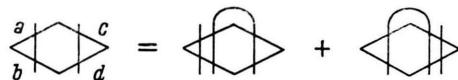


Abb. 5. Graphische Darstellung der Partialbruchzerlegung zweier Faktoren. Die Vertikalstreifen sind durch Striche ersetzt.

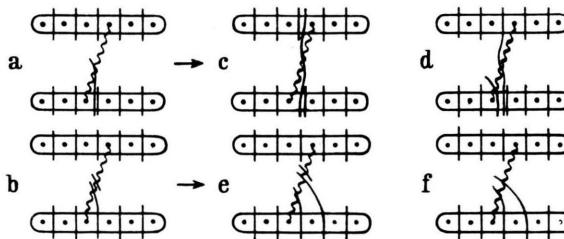


Abb. 6. Auswertung von Abb. 4 durch Partialbruchzerlegung.

diese Zerlegung nach beiden Seiten weiter, bis sich an jedem Ende nur noch oben oder unten Striche befinden, so hat man genau die Gesamtheit aller Punktfolgen vor sich, bei denen die gegenseitige Reihenfolge beider Punkte variiert wird. Der linke bzw. rechte Term von Abb. 4 enthält davon die-

jenigen Punktfolgen, bei denen die Mesonenlinie nach links bzw. rechts unten läuft.

Dieses Resultat ist allgemein genug gewonnen, um es auch für Graphen mit mehreren Ringen zu verwenden. Von den Termen $P_0 P_1 \dots P_m$ werden zunächst P_0 und P_1 zu P_{01} vereinigt, dann P_{01} und P_2 zu P_{012} , und so fort, bis sich $P_{012} \dots m = P$ ergibt, also die Gesamtheit der verschiedenen Punktfolgen zwischen den Komplexen P_0, P_1, \dots, P_m . Da die Summation in (60) über alle Punktfolgen innerhalb der P_0, P_1, \dots geht, erhalten wir als Ergebnis die Gesamtheit aller Punktfolgen der $n' + n'' + l_1 + \dots + l_m = 2n$ Punkte des gesamten Graphen, die sich durch Permutation ihrer Reihenfolge bilden lassen. Es ist in (60)

$$\begin{aligned} & Z \sum (-1)^R P_0 P_1 \dots P_m \Gamma_1 \dots \Gamma_{2n} \\ &= Z' \sum^{(2n)!} (-1)^R P \Gamma_1 \dots \Gamma_{2n}. \end{aligned} \quad (63)$$

Jede Permutation P besteht aus den $2n - 1$ Vertikalstreifen σ , und diese aus den Summen über die α und β der Linien, welche im betreffenden Streifen liegen:

$$P = \prod_{\nu=1}^{2n-1} \sigma_\nu^{-1}, \quad \sigma_\nu = \Sigma'_\nu \{\alpha, \beta\}. \quad (64)$$

Z' ist gleich Z , vermindert um die Faktoren derjenigen k_λ , deren Integration in (60) je eine der δ -Funktionen zum Verschwinden bringt. In der Summe Σ'_ν von σ sind $\alpha_0 \beta_0$ bzw. $\alpha_n \beta_n$ zu streichen, falls sie gemeinsam auftreten. Das folgt aus (12A) und auch aus den mit Abb. 4 verbundenen Überlegungen.

Irgendein Vertikalstreifen σ besteht also aus der Summe über diejenigen Größen α und β , deren Linienstücke in σ enthalten sind. Hinzu treten noch Glieder von Mesonenlinien vom Typ der Abb. 4, die wir später besprechen. Die α und β sind durch (58) gegeben. Danach besteht σ also zunächst aus der Summe über die Energien $E^{(1)}$ und $E^{(2)}$ der zugehörigen Fermionenlinien. Für jedes Teilchen ist die Differenz zwischen rechtsgerichteten und linksgerichteten Fermionenlinien genau eins. Daher tritt W nach (58) in σ stets als $-(\zeta_1 + \zeta_2) W = -W$ auf. Die erwähnte Differenz wäre 0, wenn die Hauptlinien im Vertikalstreifen nicht mitzählten. Das trifft für die Streifen zu, in denen α_0 und β_0 bzw. α_n und β_n gestrichen werden sollten. In σ bedeutet das, die Energien $E_0^{(1)}, E_0^{(2)}$ bzw. $E_n^{(1)}, E_n^{(2)}$ zu streichen und $+W$ dafür einzusetzen, wenn man außerdem $-W$ für alle Streifen beibehält. Für σ ergibt sich die Darstellung

$$\sigma = \sum E^{(1)} + \sum E^{(2)} - W + \sigma(k) + \sigma(\mu). \quad (65)$$

In den Summen sind die $E^{(1)}$ und $E^{(2)}$ gezählt, deren Fermionenlinien in σ auftreten. $\sigma(\mu)$ steht für die Mesonenlinien vom Typ der Abb. 4 und wird später untersucht.

Die Anteile der k_ν , welche in (65) durch $\sigma(k)$ zusammengefaßt sind, bedürfen nunmehr einer genaueren Untersuchung. Nach (58) gehört zu jeder in σ gezählten Fermionenlinie eine k -Summe, die nach (31) mit den Variablen zusammenhängt, die dieser Fermionenlinie zugeordnet wird. Es ist, wenn σ die Fermionenlinien im Streifen zählt,

$$\sigma(k) = - \sum_{\sigma} \epsilon_{\sigma}^x \Sigma_{\sigma}^x k, \quad (66)$$

wobei für x die entsprechende Bezeichnung als Hauptlinie der Teilchen 1 oder 2 oder als Ring einzusetzen ist. Wir betrachten eine beliebige Punktfolge P eines beliebigen Graphen, zeichnen die Mesonenlinien ein, und behaupten nun zweierlei: erstens, daß jedes $\sigma(k)$ genau diejenigen $\pm k_\nu$ enthält, deren zugehörige Mesonenlinien auch im Vertikalstreifen σ enthalten sind; und zweitens, daß innerhalb einer Punktfolge jedes $\pm k_\nu$ in allen Vertikalstreifen mit dem gleichen Vorzeichen auftritt.

Die erste Behauptung ist richtig für den Vertikalstreifen $\sigma_0 = \alpha_0 + \beta_0$, der in der Definition der P nicht mehr mitgezählt wird. Wir setzen sie für den Streifen σ_ν voraus und beweisen sie für $\sigma_{\nu+1}$ (etwa von links nach rechts gezählt). Zwischen diesen beiden Streifen liegt ein Punkt, von dem eine Mesonenlinie k_ϱ nach rechts oder links läuft. Nach der durch (31) gegebenen Impulsbilanz an den Punkten muß in der Summe der Impulse des Streifens $\nu+1$ dieser Impuls hinzutreten oder fehlen. Daher müssen auch $\sigma_\nu(k)$ und $\sigma_{\nu+1}(k)$ sich um $\pm k_\varrho$ unterscheiden. Da nach Voraussetzung $\sigma_\nu(k)$ dann k_ϱ enthält, wenn die Mesonenlinie nach links läuft, ist in diesem Falle k_ϱ in $\sigma_{\nu+1}(k)$ nicht enthalten. Denn daß k_ϱ doppelt in $\sigma(k)$ enthalten wäre, verbietet die Impulsbilanz. Da $\sigma_\nu(k)$ dann k_ϱ nicht enthält, wenn die Mesonenlinie nach rechts läuft, muß k_ϱ in $\sigma_{\nu+1}(k)$ enthalten sein. Damit ist die erste Behauptung bewiesen. Zwei benachbarte Vertikalstreifen, durch deren Grenze k_ϱ hindurchläuft, unterscheiden sich bezüglich k_ϱ nicht in ihrer Impulsbilanz. Daher muß k_ϱ auch in beiden mit dem gleichen Vorzeichen auftreten. Damit ist auch die zweite Behauptung erwiesen.

Unter Zuhilfenahme der beiden soeben bewiesenen Eigenschaften können wir die Integrationen

von (60) durchführen. Zunächst betrachten wir die Variablen vom Typ k_λ von Abb. 4. Da der Impulsbilanz entsprechend, in den Vertikalstreifen mit k_λ dieses in den $\sigma(k)$ der beiden Abbildungen mit entgegengesetzten Vorzeichen auftritt, können wir das zugehörige $\sigma(\mu) = \omega_\lambda - k_\lambda$, welches diesen Termen hinzuzufügen ist, so in den Vorzeichen (Abb. 4) wählen, daß k_λ in $\sigma(k) + \sigma(\mu)$ sich forthebt. Die Linie λ ist in σ dann nur noch durch ω_λ vertreten. Nun wird in (59) über dk_λ integriert, und die zugehörige δ -Funktion verschwindet. In gleicher Weise behandeln wir alle Linien, die wie k_λ eliminiert werden sollen, indem wir die Integration auslassen, die δ -Funktion streichen und in (65) für σ diese Linien mit ω_λ eintragen.

Wir führen die Integrationen über die restlichen Koordinaten durch, indem wir etwa k_ν herausgreifen und irgendeine Punktfolge P ins Auge fassen. Die Integration geht nach (60) über $dk_\nu/2\pi i$. Zum Integranden gehören einer der Faktoren von Z' , die in (59) in Z dargestellt sind, und von P aus (63) und (64) diejenigen Vertikalreihen σ gemäß (65), in denen die Mesonenlinie $\pm k_\nu$ auftritt. Da $\pm k_\nu$ in allen σ mit gleichem Vorzeichen erscheint, ist die Lösung einfach. Nach Z aus (59) erhalten wir eine Summe von zwei Integralen. Nehmen wir etwa an, k_ν trete negativ in allen σ auf, dann stimmt das erste Integral mit (6A) überein und verschwindet. Das zweite stimmt mit (7A) überein. Das Ergebnis besteht darin, im Integranden den Faktor $(\omega_\nu + k_\nu)^{-1}$ zu streichen und $-k_\nu$ durch $+\omega_\nu$ zu ersetzen. Bei positivem Vorzeichen von k_ν in den σ erhält man das gleiche Ergebnis. Elimination und Integration aller k_ν bewirken also lediglich, daß $\sigma(\pm k) + \sigma(\mu)$ ersetzt wird durch $\sigma(+\omega)$.

Nunmehr können wir zusammenfassen und erhalten aus (60) und (63) nach Integration und Elimination aller k_ν ,

$$\begin{aligned} \sum_{\varepsilon} \Gamma_1' \dots \Gamma_{2n} f_{mn\varepsilon} \\ = \sum_{\pi} (-1)^R P_{\pi} \Gamma_1 \dots \Gamma_{2n} (\alpha_0 + \beta_0)^{-1}. \end{aligned} \quad (67)$$

Die Summation rechts geht nicht mehr über die Energien, sondern über alle Permutationen π der Punktfolge. Wir bezeichnen einen Feynman-Graphen mit Unterscheidung der Punktfolge als Lévy-Graphen und erhalten also rechts die Summe über alle möglichen Lévy-Graphen, die zu einem Feynman-Graphen gehören. Die Vertikalstreifen σ der Lévy-Graphen bezeichnen wir als Zwischenzustände und setzen

$$\sigma = \Delta E = E_z - W. \quad (68)$$

Dann ist E_z nach (65) und der anschließenden Untersuchung die Energie des Zwischenzustandes

$$E_z = \sum E^{(1)} + \sum E^{(2)} + \sum \omega \quad (69)$$

und setzt sich aus der positiven Summe über die freien Teilchenenergien aller Fermionen- und Mesonenlinien zusammen. Sind in der Summe unter anderem beide Teilchen im Anfangs- oder Endzustand, so vertritt W die Energie dieser beiden Teilchen. Die Punkte des Graphen bezeichnen wir als Übergänge.

\check{f} besteht also nach (54) aus der Gesamtheit G von (3) aller Feynman-Graphen $\check{f}_{mn\tau\pi}$, deren jedem nach (56) und (67) die $(2n)!$ Lévy-Graphen $\check{f}_{mn\tau\pi}$ analytisch zugeordnet werden. P_π von (67) ist durch (64), (68) und (69) gegeben. $(\alpha_0 + \beta_0)^{-1}$ in (67) ist gemäß (58) gleich $(E_0^{(1)} - E_0^{(2)} - W)^{-1}$, also gleich dem Vertikalstreifen σ_0 , welcher dem Zustand links vom ersten Punkt des Lévy-Graphen zugeordnet werden kann. Damit ergibt sich für \check{f} die Darstellung

$$\begin{aligned} \check{f} &= \sum \check{f}_{mn\tau\pi}, \quad \check{f}_{mn\tau\pi} = (-1)^R \lambda^n \\ &\cdot \int \frac{d\vec{k}_1 \dots d\vec{k}_n}{2\omega_1 \dots 2\omega_n} \prod_{\mu=1}^m \delta(\sum_{l_\mu}^{(\mu)} \vec{k}) d\vec{q}^{(\mu)} \frac{\Gamma_1 \dots \Gamma_{2n}}{\Delta E_1 \dots \Delta E_{2n-1}}. \end{aligned} \quad (70)$$

Die Variablen sowie die Größen Γ und ΔE sind den zugehörigen Lévy-Graphen $(mn\tau\pi)$ in besprochener Weise zugeordnet.

Aus \check{f} ist nun gemäß (23) und (24) zunächst f und dann V zu bestimmen. Die Summation in (70) geht über alle Lévy-Graphen schließlich, die sich aus den Feynman-Graphen G bilden lassen. Neben zwei Graphen f_1 und f_2 treten in dieser Summe bis auf einige anschließend zu besprechende, scheinbare Ausnahmen alle Produktgraphen auf, die sich durch Matrixmultiplikation aus Potenzen von f_1 und f_2 bilden lassen, wie $f_1^2, f_2^2, f_1^{n_1} f_2^{n_2}, \dots$. Unter Produktgraphen verstehen wir dabei Lévy-Graphen, die eine Darstellung gemäß Abb. 7a erlauben und bei denen jeder schraffierte Bereich einzeln einen Graphen der Gesamtheit G repräsentiert.

Die Gesamtheit aller Lévy-Graphen ohne die Produktgraphen ist gleich f . Denn f besteht dann aus den Graphen f , den Graphen f^2, f^3, \dots , genau wie das gemäß (23) zu fordern ist.

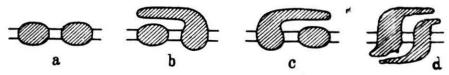


Abb. 7. Schematische Darstellung von Produktgraphen. Die innere Struktur lässt sich in den beiden schraffierten Bereichen darstellen. a) Gewöhnliche Produktgraphen. b), c), d): Produktgraphen im erweiterten Sinne. Jeder schraffierte Bereich stellt einen Graphen für sich mit der topologischen Struktur $(DC)''$ dar ($n \geq 1$).

Eine Ausnahmestellung nehmen solche Graphen ein, die wie Abb. 8a einen Zwischenzustand enthalten, in dem sich neben den beiden Fermionen nur Teilchen befinden, die weiter rechts oder links im Vakuum erzeugt werden. Im dritten Zwischenzustand von Abb. 8a werden nämlich die beiden Fermionen als $E^{(1)} + E^{(2)}$ gezählt, während sie in dem entsprechenden Produktgraphen als $+ W$ gezählt werden müssten. Jedoch lässt sich dieser letztere Produktgraph durch successive Partialbruchzerlegung nach dem Schema von Abb. 5 zerlegen in die drei Graphen von Abb. 8a bis 8c mit üblicher analytischer Bedeutung. Alle drei Graphen gehen also aus einem Produktgraphen hervor, der in f nicht enthalten sein soll. In entsprechender Verallgemeinerung definieren wir Lévy-Graphen vom Typ der Abb. 7b und 7c als Produktgraphen im erweiterten Sinne, die nunmehr ebenfalls beim Übergang von \check{f} auf f zu streichen sind.

Im Endergebnis erhalten wir also eine Beschreibung des Zweikörperproblems durch die vierkomponentige Wellengleichung (25) mit der Wellenfunktion $a = a_{\sigma_1 \sigma_2}(\vec{p})$. Der Operator V dieser Wellengleichung unterscheidet sich von f nach (24) nur durch den Faktor ΔE_0 von (70). f geht aus \check{f} von (70) her vor durch Streichung aller Produktgraphen im gewöhnlichen und erweiterten Sinne von Abb. 7. Dauer gilt für den Potentialoperator V von (25) die Darstellung (71).

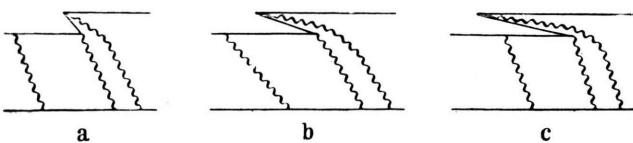


Abb. 8. Beispiel für Produktgraphen im erweiterten Sinne. Alle drei Graphen gehen durch Partialbruchzerlegung aus dem Produktgraphen hervor, der formal 8a entspricht, aber die Hauptlinien mit $+ W$ statt $E^{(1)} + E^{(2)}$ zählt.

$$V = \Sigma V_{mn\pi}, V_{mn\pi} = (-1)^R \lambda^n \quad (71)$$

$$\cdot \int \frac{d\vec{k}_1 \dots d\vec{k}_n}{2\omega_1 \dots 2\omega_n} \prod_{\mu=1}^m \delta(\sum_{l_\mu}^{(\mu)} \vec{k}) d\vec{q}^{(\mu)} \frac{\Gamma_1 \dots \Gamma_{2n}}{\Delta E_1 \dots \Delta E_{2n-1}}.$$

Der Strich am Summenzeichen deutet die Streichung der Produkt-Graphen an. Alle übrigen Größen haben die gleiche Bedeutung wie in (70). Die Γ sind nach (36) den $2n$ Übergängen (Punkten) zuzuordnen und die ΔE gemäß (68) den Zwischenzuständen (Vertikalstreifen) des Lévy-Graphen.

Die Gln. (25) und (71) sind direkt aus der Bethe-Salpeter-Gleichung abgeleitet und alle Betrachtungen über die Graphen der letzteren lassen sich auf diese Gleichung anwenden. Eine Arbeit über die Durchführung der Renormalisierung ist in Vorbereitung.

6. Mathematischer Anhang

In diesem Abschnitt werden einige eigenartige Sätze über die Lösung von Integralen des Typs (1)

$$Y = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi i} \prod_{\nu=1}^n (\alpha_\nu - \varepsilon_\nu p)^{-1}, \quad \varepsilon_\nu = \pm 1, n > 1, J_m(\alpha_\nu) < 0 \quad (1)$$

aufgestellt und bewiesen, die für die Auswertung der Integrale im Text benötigt werden. Beim Integral Y aus (1) handelt es sich zunächst weniger darum, eine Lösung dieses Integrals überhaupt zu finden, als vielmehr darum, über die Fülle der verschiedensten Darstellungsmöglichkeiten dieser Lösung, die alle durch Partialbruchzerlegung auseinander hervorgehen, einen Überblick zu gewinnen. Die Möglichkeit hierzu bietet eine graphische Darstellung von (1).

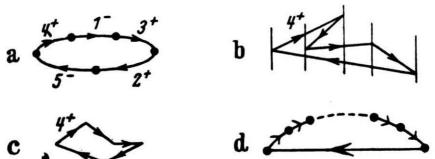


Abb. I. a) Beispiele einer Kurve mit Umlaufrichtung für $n = 5$. Die α_ν sind in irgendeiner Weise eingetragen, und die angenommenen Vorzeichen ε_ν hinzugefügt b) Beispiel einer erlaubten Punktfolge. c) Verbotene Punktfolge; 1- und 2- laufen falsch. d) Lösung (2) von Gl. (7).

Eine beliebige, geschlossene Kurve (Abb. Ia) wird gezeichnet und durch n Punkte in n Linienstücke unterteilt, die in *willkürlicher* Folge mit allen Konstanten α_ν aus (1) beschriftet werden. Der Kurve wird eine Umlaufsrichtung gegeben. Sämtliche Linienstücke werden mit einem entsprechenden Pfeil versehen. Durch Deformieren der Kurve lässt sich eine beliebige Reihenfolge der n Punkte von links nach rechts erzielen. Es existieren insgesamt $n!$ verschiedene mög-

liche Punktfolgen. Unter einer „erlaubten Punktfolge“ P soll eine Punktfolge verstanden werden, bei der alle Linienstücke α_ν eine durch die ε_ν von (1) vorgeschriebene Richtung haben. Und zwar soll der Pfeil eines Linienstücks nach rechts zeigen für $\varepsilon_\nu = +1$ und nach links für $\varepsilon_\nu = -1$, wie durch die Beispiele von Abb. Ib und c erläutert wird. Innerhalb jeder Punktfolge können wir die Figur vermittels der n Punkte in $n-1$ verschiedene vertikale Streifen σ einteilen (in Abb. Ib durch dünne Striche getrennt). Jeder Streifen ist charakterisiert durch die Linienstücke α_ν , welche er enthält.

Nach diesen vorbereitenden Bemerkungen wird behauptet, daß die Lösung von (1) gegeben ist durch

$$Y = \Sigma P, \quad P = \prod_{\lambda=1}^{n-1} \sigma_\lambda^{-1}, \quad \sigma_\lambda = \Sigma_{(\lambda)} \alpha_\nu. \quad (2)$$

Die Summation geht über alle erlaubten Punktfolgen P . Die P bestehen aus den Produkten ihrer Vertikalstreifen σ , und jedes σ_λ besteht seinerseits aus der Summe über diejenigen α_ν , deren Linienstücke den jeweiligen Vertikalstreifen durchlaufen. Existiert überhaupt keine erlaubte Punktfolge, so ist $Y = 0$. Jedes Integral ist durch seine Bestimmungsstücke $\alpha_1 \dots \alpha_n, \varepsilon_1 \dots \varepsilon_n$ charakterisiert. Verschiedene Darstellungen des gleichen Integrals entstehen bei verschiedener Aufeinanderfolge der willkürlich gewählten α_ν innerhalb der Kurve. Ein Vorzeichenwechsel in der Integrationsvariablen von (1) entspricht in der Darstellung der Richtungsumkehr aller Pfeile und läßt Y invariant.

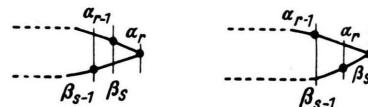


Abb. II. Verschiedene mögliche Lagen der Vertikalstreifen an der rechten Seite der Kurve.

Der Beweis von (2) wird zunächst für eine ganz bestimmte Reihenfolge der α_ν auf der Kurve geführt und später für willkürliche Aufeinanderfolgen erweitert. (Man beachte, daß auch die Anzahl der erlaubten Punktfolgen von dieser Aufeinanderfolge erheblich abhängt!) Wir nehmen an, daß r Faktoren von (1) $\varepsilon_\nu = +1$ enthalten und bezeichnen diese Koeffizienten mit $\alpha_1, \dots, \alpha_r$. Die übrigen mit $\varepsilon_\nu = -1$ bezeichnen wir als β_1, \dots, β_s und beschriften die Kurve (Abb. Ia) in der Reihenfolge $\alpha_1 \dots \alpha_r \beta_s \dots \beta_1$. Das zugehörige Integral bezeichnen wir mit $Y(r, s)$. Die erlaubten Punktfolgen sind wegen der Richtungsvorschrift alle von der gleichen Form wie Abb. Ia. Im oberen bzw. unteren Bogenstück folgen von links nach rechts $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ bzw. β_1, \dots, β_s , und die Gesamtheit der erlaubten Punktfolgen besteht nur darin, die Reihenfolge der Punkte beider Bogenhälften gegeneinander zu variieren.

Betrachten wir die Lage der Vertikalstreifen am rechten Ende der Kurve, so ist nach Abb. II der letzte Streifen stets $\sigma_{r,s} = (\alpha_r + \beta_s)$, während der vorletzte $\sigma_{r-1,s} = (\alpha_{r-1} + \beta_s)$ oder auch $\sigma_{r,s-1} = \alpha_r + \beta_{s-1}$ sein kann. Alle übrigen σ schließen sich je nach Punkt-

folge an. Diese Eigenschaft läßt sich benutzen, um die Gesamtheit der Punktfolgen von (r, s) aus den Gesamtheiten $(r - 1, s)$ und $(r, s - 1)$ aufzubauen. Nach Abb. II ist

$$\Sigma^{(r, s)} P = \{\Sigma^{(r-1, s)} P + \Sigma^{(r, s-1)} P\} (\alpha_r + \beta_s)^{-1}. \quad (3)$$

Für die Integrale $Y(r, s)$ erhalten wir durch Anwendung der Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned} & (\alpha_r - p)^{-1} (\beta_s + p)^{-1} \\ &= [(\beta_s + p)^{-1} + (\alpha_r - p)^{-1}] (\alpha_r + \beta_s)^{-1}, \end{aligned} \quad (4)$$

die gleiche Relation wie in (3) für die P -Summen. Es ist daher (2) eine Lösung für $Y(r, s)$ aus (1) für alle $r + s = n > 1$, wenn es eine Lösung für $(r, s) = (0, s); (r, 0); (1, 1)$ ist, was sich leicht nachprüfen läßt.

Bei nur einem Faktor $n = 1$ ergibt (1) das halbe Residuum

$$Y(0,1) = Y(1,0) = 1/2. \quad (5)$$

Liegen alle Singularitäten des Integranden von Y auf der gleichen Halbebene ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_n = \pm \beta$), so läßt sich die Integration in die singularitätenfreie Halbebene hinein zu einem Halbkreis vom Radius $R \rightarrow \infty$ deformieren. Da das Resultat proportional zu R^{1-n} wird, ist

$$Y(r, 0) = Y(0, s) = 0. \quad (6)$$

$$Y = \int \frac{dp}{2\pi i} (\alpha_1 - p)^{-1} \dots (\alpha_{\varrho-1} - p)^{-1} (\alpha'_{\varrho} + p) (\alpha_{\varrho+1} - p)^{-1} \dots (\alpha_r - p)^{-1} \cdot \prod_{\sigma=1}^s (\beta_{\sigma} + p)^{-1}. \quad (8)$$

Durch Partialbruchzerlegung wird es umgeformt in

$$\begin{aligned} Y = & \sum_{\nu=1}^{\varrho-1} \int \frac{dp}{2\pi i} \prod_{\lambda=1}^{\nu} (\alpha_{\lambda} - p)^{-1} \prod_{\lambda=\varrho}^{\varrho-1} (\alpha_{\lambda} + \alpha'_{\varrho})^{-1} \prod_{\lambda=\varrho+1}^r (\alpha_{\lambda} - p)^{-1} \prod_{\sigma=1}^s (\beta_{\sigma} + p)^{-1} \\ & + \sum_{\nu=\varrho+1}^r \int \frac{dp}{2\pi i} \prod_{\lambda=1}^{\varrho-1} (\alpha_{\lambda} + \alpha'_{\varrho})^{-1} \prod_{\lambda=\sigma+1}^r (\alpha_{\lambda} - p)^{-1} \prod_{\sigma=1}^s (\beta_{\sigma} + p)^{-1}. \end{aligned} \quad (9)$$

Wir zeichnen wieder die geschlossene Kurve mit den Linienelementen $\alpha_1 \dots \alpha_{\varrho-1} \alpha'_{\varrho} \alpha_{\varrho+1} \dots \alpha_r$ oben und $\beta_1 \dots \beta_s$ unten. Dann ist mit weiterer Partialbruchzerlegung leicht einzusehen, daß die Terme der ersten Summe von (9) alle Punktfolgen gemäß (2) enthalten, die sich zwischen den Punkten der drei Kurvenstücke $\alpha_1 \dots \alpha_{\varrho-1}; \alpha_{\varrho+1} \dots \alpha_r$ und $\beta_1 \dots \beta_s$ bilden lassen. Für alle diese Linienstücke ist also die alte, durch ε vorgeschriebene Richtung beibehalten. Bezeichnen wir die Punkte nach den Indizes der rechts von ihnen stehenden Linienstücke, so ist hinzuzufügen, daß speziell der ν -te Term der ersten Summe von (9) alle Punktfolgen enthält, in denen der Punkt $\varrho + 1$ unmittelbar rechts neben ν steht. ($\nu = 1, 2, \dots, \varrho - 1$), also in allen Fällen links von $\varrho + 1$. Die zweite Summe von (9) enthält dagegen alle Punktfolgen, bei denen $\varrho + 1$ links von 1 liegt, und zwar in den einzelnen Termen der Summe so, daß außerdem $\nu = \varrho + 1, \dots, r$ direkt links neben 1 liegt. Diese Nebenbedingungen

Die einfachsten Ausdrücke für $Y(r, s)$ lassen sich durch Verwendung von (4), (5) und (6) berechnen:

$$\begin{aligned} Y(r, 1) &= \int \frac{dp}{2\pi i} \prod_{\varrho=1}^r (\alpha_{\varrho} - p)^{-1} \cdot (\omega + p)^{-1} \\ &= \prod_{\varrho=1}^r (\alpha_{\varrho} + \omega)^{-1}. \end{aligned} \quad (7)$$

Die Darstellung von (7) ist in Abb. I d wiedergegeben. Sie entspricht gleichzeitig der Lösung (2), welche in diesem Falle nur aus einer einzigen erlaubten Punktfolge besteht. Für (6) existiert überhaupt keine erlaubte Punktfolge. $Y(r, 0)$ verschwindet daher auch nach (2). Die Induktionsvoraussetzung des vorigen Absatzes ist erfüllt.

Gl. (2) ist damit bewiesen, soweit man sich auf solche Reihenfolgen der Linienstücke innerhalb der Kurve beschränkt, bei denen alle Linienstücke des einen und des anderen Vorzeichens jeweils zusammenliegen. (2) bleibt natürlich richtig, wenn man die α unter sich oder die β unter sich in der Reihenfolge vertauscht. Gemäß unserer Behauptung soll aber (2) auch richtig sein, wenn die α und β wie in Abb. I in beliebiger Reihenfolge innerhalb der geschlossenen Kurve auftreten.

Diesen Beweis führen wir zunächst für den Fall, daß nur eine der Größen β unter den α an beliebiger Stelle eingeordnet ist. Wir nennen diese Größe etwa α'_{ϱ} und lassen ϱ in der Numerierung der übrigen α_{ϱ}' aus. Dann ist dieses Integral

zusammengenommen umfassen aber alle Möglichkeiten schlechthin bis auf Punktfolgen, bei denen $\varrho + 1$ rechts von ϱ steht.

Als Ergebnis erhalten wir für (8) also die Gesamtheit aller Punktfolgen mit der Bedingung, daß $\varrho + 1$ links von ϱ steht. Diese Bedingung ist aber identisch mit der Definition der erlaubten Punktfolgen. Da $\varepsilon_{\varrho} = -1$ ist, soll der Pfeil von α'_{ϱ} , der von ϱ nach $\varrho + 1$ führt, in den Punktfolgen nach links zeigen. Damit ist (2) also auch Darstellung der Lösung von (1), wenn auf der Kurve eins der bislang unten stehenden Linienstücke oben eingeordnet wird (und aus Symmetriegründen auch umgekehrt). Die Umordnung eines zweiten Linienstücks und beliebig vieler weiterer erfolgt genau nach dem hier gegebenen Schema. Jedesmal ergibt sich die Gesamtheit aller Punktfolgen im Sinne ihrer Definition als Resultat. Damit ist aber (2) auch für willkürliche Aufeinanderfolge der α_{ν} in der Kurve bewiesen.

Für bestimmte Anwendungen wird (2) noch in anderer Umformung benötigt. Es wird ein spezielles Integral vom Typ (1) betrachtet.

$$Y = Y \left(\begin{smallmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_{n'} \\ \beta_0 & \beta_1 & \dots & \beta_{n''} \end{smallmatrix} \right) \equiv Y \left(\begin{smallmatrix} 0 & n' \\ 0 & n'' \end{smallmatrix} \right),$$

$$\varepsilon_0^\alpha = \varepsilon_n^\alpha = +1, \quad \varepsilon_0^\beta = \varepsilon_{n''}^\beta = -1. \quad (10)$$

Die übrigen ε -Werte seien beliebig. Wir tragen die Konstanten auf der geschlossenen Kurve in der Reihenfolge $\alpha_0 \dots \alpha_{n'} \beta_{n''} \dots \beta_0$ so auf, daß $\alpha_0 \beta_0$ links und $\alpha_{n'} \beta_{n''}$ rechts liegen. Jetzt suchen wir eine Lösung auf, die sich von (2) dadurch unterscheidet, daß jede ihrer Punktfolgen einen Faktor $(\alpha_0 + \beta_0)^{-1} (\alpha_{n'} + \beta_{n''})^{-1}$ enthalten soll. Wir erreichen das durch Partialbruchzerlegung von α_0, β_0 sowie $\alpha_{n'}, \beta_{n''}$. Es entsteht zunächst

$$Y \left(\begin{smallmatrix} 0 & n' \\ 0 & n'' \end{smallmatrix} \right) = (\alpha_0 + \beta_0)^{-1} \left\{ Y \left(\begin{smallmatrix} 0 & n' \\ 1 & n'-1 \end{smallmatrix} \right) + Y \left(\begin{smallmatrix} 0 & n'-1 \\ 1 & n'' \end{smallmatrix} \right) \right. \\ \left. + Y \left(\begin{smallmatrix} 1 & n' \\ 0 & n'-1 \end{smallmatrix} \right) + Y \left(\begin{smallmatrix} 1 & n'-1 \\ 0 & n'' \end{smallmatrix} \right) \right\} (\alpha_{n'} + \beta_{n''})^{-1}. \quad (11)$$

Graphisch ist dieser Zerlegungsprozeß in Abb. II für das rechte Ende veranschaulicht. Auf die verbleibenden Integrale in der geschweiften Klammer wenden wir (2) an und erhalten wiederum alle erlaubten Punktfolgen für diese Integrale, denen jetzt jeweils zwei der Liniensegmente $\alpha_0, \beta_0, \alpha_{n'}$ oder $\beta_{n''}$ fehlen. Gemäß Abb. 2 können wir anschließend im Ergebnis die 4 Gesamtheiten wieder zu einer einzigen zusammenfügen, die sich formal wie (2) darstellen läßt:

$$Y \left(\begin{smallmatrix} 0 & n' \\ 0 & n'' \end{smallmatrix} \right) = \Sigma' P, \quad P = \sum_{\lambda=1}^{n'+n''-1} \sigma_\lambda^{-1}, \quad \sigma_\lambda = \Sigma'(\lambda) \{ \alpha, \beta \}. \quad (12)$$

Entsprechend (11) nehmen die beiden äußersten Punkte an der Bildung der Punktfolgen nicht teil und bleiben ganz außen. Σ' in (12) bedeutet daher die Bildung aller erlaubten Punktfolgen unter Beibehaltung der äußeren Punkte. Eine andere Vorstellung wäre, diese beiden nach links und rechts ins Unendliche zu verschieben. Es bleiben an Stelle der geschlossenen Kurven zwei Hauptlinien, über deren Punkte dann tatsächlich alle erlaubten Punktfolgen ausgeführt werden müssen. Enthält das Integral Faktoren, deren ε_ν vom entsprechenden ε_0 abweichen, so enthalten die Punktfolgen Zacken, wie etwa in Abb. I b. Das hat in einigen Punktfolgen die Existenz von Vertikalstreifen zur Folge, die neben dem Zacken noch α_0 und β_0 oder $\alpha_{n'}$ und $\beta_{n''}$ oder beides enthalten sollten. Gemäß unserer Ableitung über (11) können jedoch in den zugehörigen σ von (12) nur die Liniensegmente des Zackens enthalten sein, nicht dagegen die Liniensegmente $\alpha_0 \beta_0$ bzw. $\alpha_{n'} \beta_{n''}$. $\Sigma'(\lambda)$ in (12) bedeutet wie bisher die Summe über alle Liniensegmente α im Vertikalstreifen. Sind jedoch $\alpha_0 \beta_0$ oder $\alpha_{n'} \beta_{n''}$ gleichzeitig in σ enthalten, so sind sie zu streichen. Bestehen die beiden Hauptlinien nur aus gleichgerichteten Liniensegmenten, so fallen (12) und (2) zusammen, da $\alpha_0 \beta_0$ und $\alpha_{n'} \beta_{n''}$ ohnehin außen liegen.

Zum relativistischen Zweikörperproblem der Quantenmechanik II

Von WILHELM MACKE

Aus dem Instituto de Física Teórica, São Paulo, Brasil

(Z. Naturforschg. 8a, 615—620 [1953]; eingegangen am 30. Juni 1953)

Die vierkomponentige Wellengleichung (1) zur Beschreibung gebundener Zustände zweier Teilchen wird untersucht und durch willkürliche Transformationen in neue Darstellungen überführt. Dabei zeigt sich insbesondere, daß zwei bekannte Darstellungen dieser Gleichung sich ineinander transformieren lassen, deren eine von Tamm-Dancoff-Lévy aus der einzeitigen Darstellung der Feldtheorie abgeleitet wurde, und deren andere vom Verfasser in Teil I bestimmt wurde und auf die Bethe-Salpeter-Gleichung zurückführt.

Das Bewegungsproblem zweier gebundener Dirac-Teilchen, deren Bindungskräfte durch ein Mesonenfeld von ganzzahligem Spin hervorgerufen werden, läßt sich im Impulsraum der Differenzkoordinaten durch die vierkomponentige Wellengleichung

$$Wa(\vec{p}) = \left[\sqrt{m_1^2 + \vec{p}^2} + \sqrt{m_2^2 + \vec{p}^2} - V \right] a(\vec{p}) \quad (1)$$

beschreiben. Dabei ist $a(\vec{p})$ die Wellenfunktion, W die Gesamtenergie, m_1 und m_2 sind die Massen der Teilchen, und V schließlich ist ein Integraloperator, der die Wechselwirkung der Teilchen enthält und durch eine Gesamtheit von Graphen gegeben ist,

die topologisch durch die Feynman-Graphen bestimmt werden, aber außerdem noch die Reihenfolge der Punkte und der dazwischenliegenden Vertikalstreifen unterscheiden und diese als virtuelle Übergänge und Zwischenzustände deuten lassen. Sie werden kurz als Lévy-Graphen bezeichnet.

Eine Ableitung der Gl. (1) wurde von Tamm¹, Dancoff² und Lévy³ (TDL) gegeben, die sich auf die einzeitige Feldtheorie aufbaut. In diesem Falle

¹ I. Tamm, J. Physics [Moskau] 9, 449 [1945].

² S. M. Dancoff, Physic. Rev. 78, 382 [1950].

³ M. Lévy, Physic. Rev. 88, 72 [1952].